RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 19 marzo 1905.

F. D'Ovidio, Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Fisiologia. — *Depressione barometrica e pressione parziale del* CO_2 *nell'aria respirata.* Osservazioni fatte sulle scimmie. Nota del Socio Angelo Mosso.

§ 1.

Nelle ricerche fatte sulla vetta del Monte Rosa intorno a questo argomento incontrai tali difficoltà, che la prima Nota [1] deve considerarsi come la pubblicazione di un abbozzo. Si vide però con evidenza che la sensibilità per l'anidride carbonica inspirata diminuisce sulle montagne: e la stessa cosa venne confermata nelle esperienze fatte nel laboratorio sugli animali; [2] ricorderò come esempio la figura 3, dove avendo amministrato ad un coniglio una mescolanza di $CO_2 = 13{,}3\ \%$ nell'aria comune colla pressione barometrica di 731 mm., si vide che producendo una rapida depressione, mentre respirava tale mescolanza di CO_2 la profondità del respiro diveniva meno forte che non respirando l'aria normale. Questo non avrebbe dovuto succedere se non vi fosse stata una diminuzione dell'eccitabilità nei centri respiratorî, perchè malgrado che la pressione barometrica fosse diminuita a mezza atmosfera, vi era sempre una pressione parziale considerevole del CO_2. Prima era 99,75 mmHg. dopo era ancora 55,86 mmHg, e quindi sufficiente per produrre una

(1) A. Mosso, Archives italiennes de Biologie. Tome XLI, pag. 426.
(2) A. Mosso, Archives ital. de Biologie. Tome XLI, pag. 441.

eccitazione dei centri respiratorî, se non fosse diminuita la sensibilità per l'anidride carbonica.

Ho voluto ripetere queste esperienze con altro metodo: preparo in un grande gasometro della capacità di 500 litri una mescolanza di anidride carbonica con aria: messa una scimmia sotto una grande campana di vetro che chiude ermeticamente sopra una tavola di marmo, faccio passare dentro la campana la mescolanza contenuta nel gasometro, e noto bene gli effetti che essa produce sull'animale. In una seconda esperienza preparo un'altra mescolanza di CO_2 ed aria che contenga la dose doppia di CO_2 e messo lo stesso animale a mezza atmosfera di pressione barometrica gli si fa respirare l'aria del gasometro. Perchè non scemi troppo la proporzione dell'ossigeno adoperando forti quantità di CO_2, aggiungevo nel gasometro una quantità corrispondente di ossigeno perchè l'aria respirata mantenesse la proporzione normale di questo gas. Ho fatto queste esperienze sopra le scimmie perchè sentono meglio l'azione dell'aria rarefatta che non la sentano i cani; e adoperai un Papio anubis venuto dall' Eritrea che pesa 5300 gr. il quale trovasi da oltre un anno nel laboratorio. È un animale molto buono ed affezionato sul quale ho già fatto una serie di ricerche sulla pressione parziale dell'ossigeno (1).

ESPERIENZA 1ª.

Ore 2,15′. Si mette la scimmia sotto la campana e per mantenere l'aria pura si fa una corrente col soffietto.

Ore 2,32′. Scrivo il tracciato del respiro linea 1, fig. 1. Il metodo adoperato in questa registrazione è semplice, esso consiste nell'applicare un timpano registratore di Marey ad uno dei tre tubi che stanno nel collo della campana. Il cambiamento di volume del torace, nel quale l'aria si dilata pel riscaldamento e il tempo perduto fra la dilatazione polmonare per effetto della diminuita pressione negli alveoli e la penetrazione dell'aria ambiente nell'albero respiratorio, bastano per dare una differenza che si trasmette al timpano registratore, sebbene la campana abbia la capacità di 50 litri. Il tempo è scritto in secondi, e come si vede dal tracciato, la frequenza del respiro è 42 al minuto.

Ore 2,34′. Comincia a passare la mescolanza dal grande gasometro di 600 litri. L'analisi fatta prima diede $CO_2 = 9{,}45\ ^0/_0 - O_2 = 21\ ^0/_0$. La pressione barometrica = 746 mm. Temp. della stanza = 14°,5. A misura che l'aria sotto la campana diviene più ricca di CO_2 cresce la profondità del respiro.

Ore 2,47′. Sono già passati 145 litri della mescolanza CO_2 sotto la campana. Il respiro è divenuto profondo ed affannoso. La scimmia ha la faccia sofferente, i movimenti sono divenuti incerti con oscillazioni del capo. Respiro 80 al minuto. Si contraggono anche i muscoli dell'addome nella espirazione attiva. La linea 2, fig. 1, fu scritta col timpano di Marey innestato sopra un tubo della campana, mentre da un altro arriva la corrente del gas dal contatore, e dall'altro tubo può uscire l'aria dalla campana.

Ore 3,10′. La scimmia sta male, si appoggia colle braccia sul fondo della camera pneumatica tanto è forte la dispnea; oppure si mette sulle quattro zampe con atteggia-

(1) A. Mosso, Archives ital. de Biologie. Tome XLII, pag. 23.

mento di sofferenza, mentre respira profondamente; perde l'orina e le feci. Poi torna a sedersi, ma poggia il dorso delle mani sulla tavola di marmo con un atteggiamento insolito. Chiude gli occhi e vacilla. Sono passati 260 litri della mescolanza di CO_2 sotto la campana. Frequenza del respiro 74.

Ore 3,13′. Si scrive la linea 3 della fig. 1. Frequenza del respiro 78 al minuto con dispnea profonda. La scimmia è profondamente apatica, con espressione di sofferenza nella faccia. Chiamata non risponde e tiene la testa rovesciata fortemente indietro. La respirazione dispnoica è profondissima, ad ogni dilatazione del torace si affonda un poco l'addome

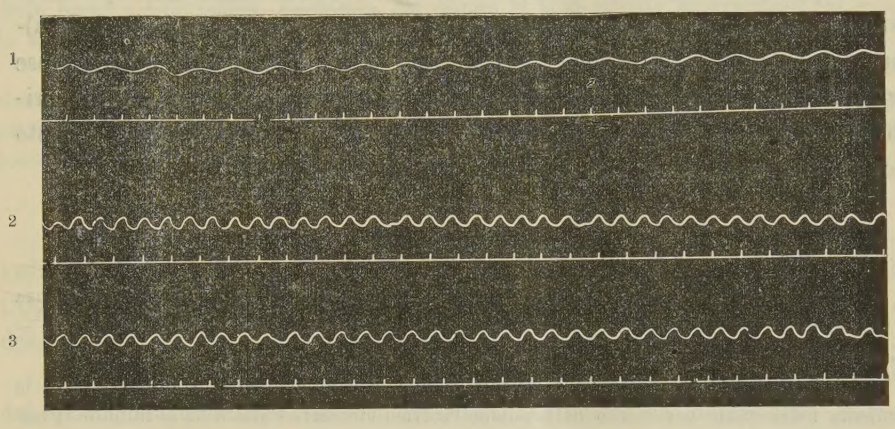

Fig. 1.

e vedesi l'espirazione attiva. La motilità attesta una forte depressione, la scimmia si appoggia alle pareti della campana per non cadere.

Ore 3,15′. Si solleva la campana quando erano passati 310 litri. L'animale scende spontaneamente; sembra un po' meno agile, subito dopo si rimette e mangia una noce. Frattanto si era preparata una nuova miscela di aria, la quale contenesse il doppio di CO_2 e di O_2 della precedente. L'analisi fatta dava 18,83 °|₀ CO_2 e 41,09 °|₀ O_2.

Ore 4,12′. Si mette la scimmia sotto la campana e comincia la depressione barometrica.

Ore 4,26′. La pressione è ridotta a metà atmosfera, cioè 373 mm.; si fa passare l'aria del gasometro sotto la campana alle ore 4,27′.

Ore 4,34′. Sono passati 100 litri della miscela. Le respirazioni divenute profonde ed affannose, sono 84 al minuto. L'animale sta discretamente bene e le sue funzioni psichiche sembrano normali.

Ore 4,40′. Passarono 185 litri della mescolanza di aria con CO_2 ed ossigeno nella campana. Mi sembra che il respiro sia meno profondo, ma è più frequente, contiamo 84 respirazioni al minuto. Le forze dell'animale sono meno depresse, la posizione delle estremità normale. La scimmia sta accoccolata e non prese mai degli atteggiamenti di una dispnea intensa. Pupilla normale.

Ore 4,43′. Sono passati 215 litri. Si muove bene. L'animale soffre meno che nella esperienza precedente; gira e si volta sotto la campana senza appoggiarsi come faceva l'altra volta alle pareti della campana.

Ore 4,45′. Sono passati 290 litri. Il respiro è meno profondo, sono migliori le condizioni generali. Respira 80 volte al minuto. Si dà nuovamente aria mentre si fermano le pompe, e l'animale torna lentamente alla pressione di 746 mm.

Dalle due precedenti esperienze risulta che questa scimmia, quando si mantiene eguale la pressione parziale dell'anidride carbonica nell'aria rarefatta, presenta dei sintomi di avvelenamento meno gravi che non nella pressione barometrica normale.

§ 2.

Dopo aver confermato quanto avevo già veduto sull'uomo, sperimentando nella Capanna Regina Margherita (1) cercai come avevo già fatto allora aumentando la pressione parziale del CO_2 di stabilire quanto fosse grande la resistenza per questo gas nell'aria rarefatta; queste indagini richiedono una serie molto maggiore di esperienze di quanto siami rimasto tempo da consacrarvi e per ciò mi limito ad accennarle.

ESPERIENZA 2ª.

Lo stesso Papio anubis viene messo sotto la campana di 50 litri. La mescolanza di CO_2 fatta nel grande gazometro con l'aggiunta di ossigeno analizzata dà $CO_2 = 10{,}55\ \%$ — $O_2 = 22{,}10\ \%$.

La frequenza del respiro dopo 20 minuti che la scimmia stava tranquilla sotto la campana nella quale per mezzo delle pompe facevasi circolare l'aria è 32 al minuto. Pressione barom. 756 mm. Temp. = 14°.

Ore 2,10′. Comincia a passare la mescolanza sotto la campana.

Ore 2,18′. Passarono circa 100 litri di aria con CO_2. I movimenti del respiro diventarono profondi, sono 60 al minuto.

Ore 2,27′. Passarono 168 litri. L'animale è sofferente. Barcolla, tiene la bocca aperta. Espirazione attiva. Le orecchie sono rosse come al solito, la muccosa delle labbra e della bocca non è cianotica.

Ore 2,30′. Sta male, cade, si rialza a stento, rovescia indietro la testa; sono passati 200 litri. Respiro 84 al minuto. Torna a cadere accasciato cogli occhi chiusi.

Ore 2,34′. Temendo che muoia, alziamo la campana quando erano passati 220 litri.

Appena respira l'aria normale l'animale sta meglio, salta giù dalla tavola, sembra per un istante meno svelto e subito dopo si rimette.

Frattanto avevamo preparato un'altra mescolanza che contiene un poco più del doppio di CO_2.

L'analisi diede $CO_2 = 23{,}79\ \%$ — $O_2 = 39{,}01\ \%$.

Messa la scimmia sotto la campana il respiro è tanto debole e superficiale che può contarsi solo con stento: sono 45 inspirazioni al minuto.

Ore 3,2′. Si chiude un poco l'accesso dell'aria e le pompe che già funzionavano fanno scemare la pressione barometrica nella campana. Si giunge lentamente a mezza atmosfera.

(1) A. Mosso, Archives ital. de Biologie. Tome XLI, pag. 426.

Ore 3,27′. Dopo 10 minuti che abbiamo raggiunto la pressione di 380 mm. comincia a passare l'aria del gasometro con 23,79 °|₀ di CO_2.

Ore 3,30′. Sono passati 140 litri della mescolanza mentre la pressione si mantiene a 380 mm. Frequenza del respiro 78.

Ore 3,38′. Passarono 220 litri. Respirazione affannosa, inspirazioni profonde. Di quando in quando l'animale cambia di posizione, si regge però bene sulle gambe. Sta attento e grida quando vede qualcuno entrare nella camera.

Ore 3,50′. Passarono 300 litri. La dispnea sempre meno grave che nell'esperienza precedente alla pressione barometrica normale. Non sono cambiate di colore le muccose della bocca e delle labbra. Frequenza del respiro 78 in un minuto. Mostrandogli una noce la scimmia stende la mano per prenderla.

Ore 3,51′. Respiro 81 al minuto. L'animale sta indubbiamente meglio che nella esperienza precedente, non è mai caduto, non si appoggia alle pareti della campana, l'atteggiamento delle estremità è poco diverso dal normale; eccetto la dispnea, il suo aspetto poco diverso dal normale.

Facendo il calcolo della pressione parziale del CO_2 nelle due esperienze, vediamo che alla pressione normale di 756 mm. la pressione parziale del $CO_2 = 10{,}5\ \%$ era 79,38 mmHg., mentre alla pressione di 380mm. essendovi 23,7 % di CO_2 la pressione parziale di questo gas era 90,06 mmHg.

Dobbiamo quindi conchiudere che anche quando la pressione parziale del CO_2 è maggiore sono minori gli effetti, se agisce la depressione barometrica.

Questo risultato viene a confermare quanto avevo già osservato sulle Alpi nell'uomo. Ricordo le esperienze fatte sopra di me a Torino (come si vede nel tracciato 5 e 6, pag. 431 Archives ital. de Biologie, tome XLI); respirando dell'aria che conteneva 2,3 % di CO_2 ottenevasi un aumento nell'altezza delle respirazioni toraciche. Arrivato alla Capanna Regina Margherita devo respirare una mescolanza del 13,1 % di CO_2 nell'ossigeno per produrre un effetto un poco più marcato sul respiro (come risulta dalla fig. 12 pag. 437). Le pressioni parziali del CO_2 stanno fra di loro come 17,2 mmHg. a 56,3 mm. (cioè circa 1 : 3 :) malgrado questa prevalenza della pressione parziale del CO_2 nell'aria rarefatta a 430 mm. si vede che nella Capanna Regina Margherita è meno intensa l'azione del CO_2.

Sperimentando con pressioni maggiori di CO_2 prendono tale sviluppo i fenomeni dovuti all'azione velenosa di questo gas, che diviene meno evidente la differenza nell'aria rarefatta.

Un'altra esperienza ricorderò ancora che venne fatta su L. Magnani. A Torino colla pressione di 750 mm. con 1,85 di CO_2 si produce un aumento del respiro e la pressione parziale del CO_2 è 13,87 mmHg. Sul Monte Rosa colla pressione di 430 mm. e 4 % CO_2 nell'ossigeno la pressione parziale del CO_2 è 17,20 mmHg. e si produce un rallentamento del respiro e una diminuzione nell'ampiezza delle inspirazioni.

Sono il primo ad ammettere che tali raffronti presentano delle gravi

difficoltà, ma è però certo che esiste una differenza e che la stessa pressione parziale di CO_2 produce effetti meno intensi nell'uomo e negli animali quando l'aria è rarefatta.

Altre esperienze vennero fatte dal dott. Aggazzotti sull'*orang-utang*, che è una scimmia più sensibile alle depressioni barometriche, e queste osservazioni verranno pubblicate in una prossima Nota.

Due sono le cause per cui gli animali respirando forti dosi di CO_2 stanno meglio nell'aria rarefatta che non alla pressione normale, sebbene sia uguale la pressione parziale del CO_2.

La prima sta nella minore eccitabilità dei centri respiratorî, dimostrata con molteplici esperienze nelle mie precedenti Note: la seconda trova il suo fondamendo nelle ricerche recenti di Bohr intorno all'influenza che la tensione del CO_2 esercita sull'assorbimento dell'ossigeno.

Bohr [1] ha dimostrato che il contenuto di anidride carbonica del sangue esercita una influenza notevole sulla combinazione dell'ossigeno coll'emoglobina; e che quando la pressione parziale dell'ossigeno è diminuita, l'anidride carbonica agisce mettendo in libertà dell'ossigeno dal sangue. Bohr spiega a questo modo l'effetto benefico che produce l'anidride carbonica quando si respirano delle mescolanze gassose nelle quali è piccola la pressione parziale dell'ossigeno. I risultati delle esperienze da me fatte sulle Alpi e nella campana pneumatica respirando l'anidride carbonica, vanno pienamente d'accordo con questa importante scoperta del Bohr.

Fisiologia. — *La pressione del sangue nell'aria rarefatta.* Nota del Socio Angelo Mosso.

§ 1.

La pressione sanguigna nell'aria rarefatta non fu ancora studiata, per quanto io sappia, col metodo grafico. In questa Nota mostrerò come si possano superare le difficoltà che presenta tale registrazione manometrica. P. Bert che primo tentava lo studio della pressione sanguigna nella decompressione, malgrado i mezzi dei quali disponeva, si limitò a far poche esperienze nel suo grande cilindro di ferro, ma in causa dei coaguli che si formavano, le osservazioni di P. Bert rimasero molto incomplete; onde egli disse: « Les rares constatations que j'ai pu faire ne m'ont montré que de faibles diminutions » [2]. Nell'esperienza CCXIX nella quale raggiunse una depressione barometrica

[1] Centralblatt für Physiologie Bd. XVII, 1903, pag. 662.

[2] P. Bert, *La pression barométrique*. Paris, 1878, pagg. 719 e 707.

di 260 mm. la pressione sanguigna si mantenne immutata, cioè come era prima alla pressione barometrica normale.

Fränkel e Geppert (1) studiarono con maggiore successo la pressione del sangue nell'aria rarefatta: il metodo che essi adoperarono non permetteva di scrivere il polso e le variazioni della pressione sanguigna, onde si limitarono a leggere sulla scala del manometro la differente altezza della colonna di mercurio. Essi trovarono che la pressione del sangue non cambia per depressioni molto considerevoli. Quando queste erano tali da mettere in pericolo la vita, come in una esperienza nella quale il barometro segnava 215 mm., osservarono un forte aumento della pressione con rallentamento del polso. La pressione saliva nelle altre esperienze di 2 centimetri quando la depressione arrivava a 400 mm.

Lazarus e Schyrmunsky fecero nel 1883 delle ricerche coll'apparecchio di v. Basch nella camera pneumatica e tentarono anche delle esperienze sugli animali, ma con risultati poco chiari (2). G. Liebig nel 1895 si servì del mio sfigmomanometro (3) studiando l'uomo nella camera pneumatica; ma in due persone trovò un aumento e in due altre una diminuzione. Egli lavorava però con deboli depressioni di 543 mm. a 425 mm. che corrispondono appena all'altezza del Monte Rosa. Altre misure fatte da R. Heller, W. Mayer e H. v. Scrötter (4) col manometro di v. Basch sulle montagne nell'attitudine di 2210 diedero un aumento della pressione.

A. Loewy studiando col metodo di Zuntz (5) la velocità della corrente sanguigna nell'aria rarefatta a metà atmosfera, trovò che nel riposo non cambia la velocità della circolazione quando diminuisce la pressione parziale dell'ossigeno nell'aria degli alveoli, fino al limite dove comincia a manifestarsi la mancanza dell'ossigeno nei tessuti. Questa comunicazione preliminare (6) non fu corredata che io sappia dalla pubblicazione di particolari esatti delle esperienze fatte.

Nelle spedizioni che feci al Monte Rosa studiai la pressione sanguigna servendomi dello sfigmomanometro, ma per l'altitudine di 4560 m. quando era esclusa la fatica, non osservai alcuna differenza (7).

(1) Fränkel und Geppert, *Ueber die Wirkungen der verdünnten Luft.* Berlin, 1883, pag. 65.

(2) Lazarus e Schyrmunski, *Ueber die Wirkungen des Aufenthaltes in verdünnter Luft.* Zeitschrift für klin. Medicin, VII, 1883.

(3) G. v. Liebig, *Der Luftdruck* Braunschweig, 1898, pag. 77.

(4) Zeitschrift für klin. Medicin, Bd. 33.

(5) Zuntz, Archiv. f. d. ges. Physiologie, tome 55.

(6) A. Loewy, *Ueber die Resorption und Circulation unter verdünnter und verdichter, sauerstoffarmer und sauerstoffreicher Luft.* Archiv. f. d. ges. Physiologie, 1894, tome 58, pag. 409.

(7) A. Mosso, *Fisiologia dell'uomo sulle Alpi*, pag. 74.

§ 2.

Il metodo che adoperai è semplice. Sotto una grande campana di vetro che poggia sopra una tavola di marmo e chiude ermeticamente per mezzo del grasso, si mette il cilindro affumicato (come si vede nella fig. 56, pag. 317 del mio libro *Fisiologia dell'uomo sulle Alpi*). L'asse del cilindro attraversa la tavola di marmo scorrendo a dolce fregamento in un cilindro di ottone che lo abbraccia e chiude a tenuta d'aria. Quest'asse può alzarsi ed abbassarsi per mezzo di una vite che sta sotto la tavola. Un sistema di carrucole messe in movimento da un motore Baltzar servono ad imprimere la velocità di rotazione più conveniente al cilindro.

Avendo osservato nelle prime esperienze fatte sui cani che la pressione sanguigna non cambia per depressioni corrispondenti all'altitudine del Monte Rosa, tentai subito in altre esperienze una rarefazione dell'aria corrispondente alla montagna più elevata che siavi sulla terra, il monte Everest, alto 8900 m. Fra quelle che feci a tale depressione, ne scelgo una dove fu molto rapida la depressione ed egualmente rapida la ricompressione, e riproduco questo tracciato che mi sembra più interessante degli altri.

Esperienza I.

3 gennaio. Un cane giovane che pesa 2800 gr. riceve a dosi ripetute tre grammi di cloralio nella cavità addominale, quindi si prepara la carotide che si mette in comunicazione col manometro a mercurio che sta sotto la campana. Alle ore 10,33′ si comincia a scrivere il tracciato della pressione sanguigna normale che era 135 mm. fig. 1.

Non riproduco l'ascissa reale dello zero per economia di spazio; nel tracciato si vedono le oscillazioni respiratorie della pressione. In A dove trovasi un'interruzione fermo il cilindro e comincia la decompressione: prima la pompa funzionava con largo accesso dell'aria, cosicchè il manometro segnava 0 per la pressione atmosferica che era 728 mm. Quando la rarefazione dell'aria è tale che il manometro segna 228 mm. che corrisponde all'altezza di 9600 m., metto in moto nuovamente il cilindro. Per questa fortissima depressione pari a 9600 m. la pressione sanguigna è divenuta solo 4 mm. minore. La frequenza del respiro si è alquanto accelerata, come vedesi nel mezzo del tracciato, dopo la pressione tende a diminuire: ma la differenza è appena di 8 mm. alla fine della fig. 1.

Trascorsi sette minuti dal momento che cominciò la depressione vedendo che il respiro è divenuto più lento, come osservasi in principio della fig. 2, dò libero accesso all'aria nel punto segnato α; dopo 1 minuto si ristabilì la pressione normale di 728 mm. Le pulsazioni diventarono più ampie e diminuì

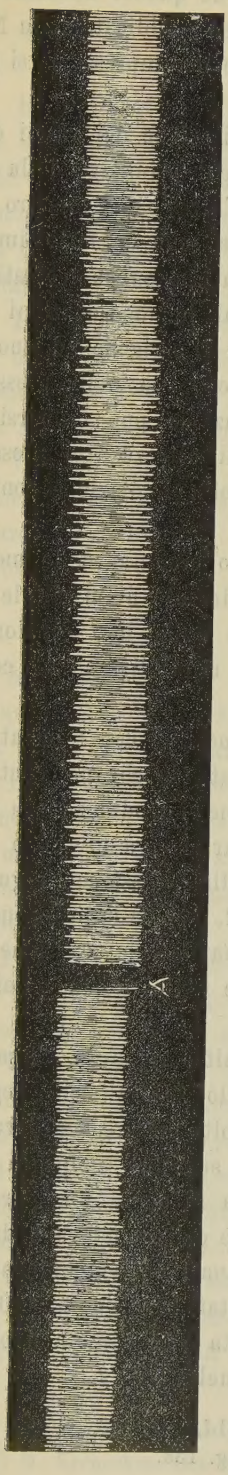

Fig. 1.

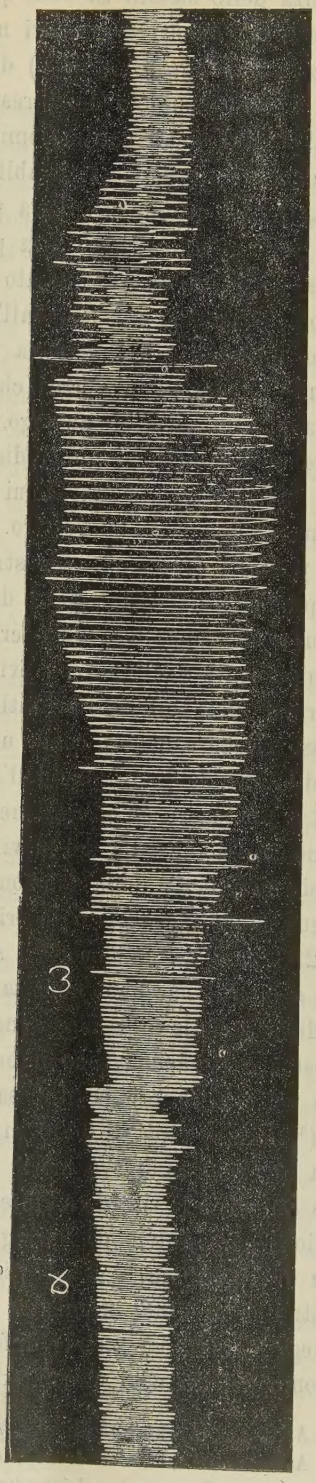

Fig. 2.

la frequenza delle sistoli. Si vede qui nella circolazione quanto abbiamo osservato per i movimenti respiratorî nei tracciati che ho pubblicato nella Nota *L'apnea prodotta dall'ossigeno* (1) dove per le rapide decompressioni si produsse un arresto completo della respirazione.

L'azione sul cuore che rassomiglia ad una eccitazione dei vaghi dura circa due minuti, e dopo si ristabiliscono le condizioni primitive della circolazione. Questi mutamenti della pressione come l'arresto del respiro che osservasi nelle rapide discese alla pressione ordinaria, sono un fatto importante che merita di essere studiato in rapporto alle ascensioni aereostatiche. Nella Nota sull'apnea prodotta dall'ossigeno pubblicai le modificazioni che succedono nel respiro passando da un regime povero di ossigeno ad uno più ricco: qui vediamo i mutamenti che succedono nel cuore e nella pressione sanguigna per un processo analogo. Come la respirazione può fermarsi per due o tre minuti in una rapida discesa dalle grandi altezze alle pressioni normali, vediamo qui le alterazioni che produconsi nella circolazione contemporaneamente a quelle del respiro.

Le presenti esperienze dimostrano come possano prodursi delle modificazioni profonde nella nutrizione dei tessuti e specialmente nelle cellule nervose, senza che apparisca un'alterazione immediata nella loro funzione, e questi mutamenti risaltano con evidenza quando si ristabiliscono le condizioni normali dell'ambiente primitivo.

Posso ritenere questa come una legge che dimostrai coi tracciati del respiro diminuendo la razione dell'ossigeno (2) constatando che nei centri respiratorî si produceva un'alterazione profonda senza che si modificasse in modo corrispondente la funzione del movimento. Qui comparisce ora lo stesso fenomeno nei mutamenti della funzione cardiaca e della pressione sanguigna. Certo, guardando il tracciato in principio della fig. 2, mentre la pressione era ancora 228 mm. nessuno poteva supporre che tornando alla pressione normale da α in ω si sarebbe prodotta una modificazione tanto profonda nei battiti cardiaci e nella pressione sanguigna.

Queste osservazioni sono interessanti per un altro riguardo. Tissandier per due volte nella rapida discesa aereostatica dello *Zénith* si è svegliato quando (3) giunse circa a 6000 m.: e la seconda volta mentre scendeva dall'altezza di 8600 m. trovò morti nella navicella i suoi due compagni Sivel e Croce Spinelli. Il ritardo a riprendere la coscienza fu anche maggiore nell'ascensione aereostatica di Süring e Berson, perchè essi scendevano dall'altitudine di 10,800 m. e si svegliarono tutti due quasi contemporaneamente nell'altitudine di 6000 m. mentre nel salire erano stati bene fino a 10,000 m. Per spiegare una così grande differenza tra la salita e la discesa dobbiamo tener conto dei disturbi circolatorî che si vedono nella fig. 2.

(1) A. Mosso, Archives italiennes de Biologie, tome XLI, pag. 146.
(2) A. Mosso, Archives ital. de Biologie, tome XL, pag. 138.
(3) P. Bert, *La pression barométrique*, pag. 1066

§ 3.

Ho già studiato (1) in un altro mio scritto le alterazioni che si producono nel tessuto polmonare in seguito alle forti decompressioni e sono d'accordo col prof. Kronecker che nell'aria rarefatta succedono delle alterazioni polmonari. Kronecker afferma (2) che il male di montagna sia causato dalle stasi che si producono nella circolazione dei polmoni per effetto dell'aria rarefatta.

L'aver osservato in questa esperienza che alla pressione barometrica di 228 mm. corrispondente all'altitudine di 9600 m. non si è modificata la pressione sanguigna, ci impedisce di ammettere che la depressione barometrica agisca in modo meccanico sulla circolazione polmonare.

Volendo conoscere i disturbi circolatorî che si producono nella morte, quando la depressione barometrica diviene così intensa da riuscire fatale, spingo la rarefazione dell'aria fino a 128 mm. che corrisponde all'altitudine di 14,200 m.

Esperienza II.

Alle ore 11, dopo aver lasciato il cane tranquillo per circa 15 minuti, torniamo ad amministrargli un grammo di cloralio e comincia il tracciato della fig. 3, dove vediamo che il polso è divenuto un poco più lento e l'animale respira solo 8 volte al minuto. Scritto il tracciato normale linea 1, fig. 3, comincia in α la depressione barometrica e muovo leggermente il cilindro per fare un segno; la curva continua nel tracciato seguente. In ω linea 1, fig. 4 la pressione nella campana è solo 128 mm. corrispondente all'altitudine di 13,039 metri.

È importante vedere come dopo ω, malgrado la rapida e forte depressione cui fu soggetto questo cane, che la forza delle contrazioni cardiache e la pressione sanguigna siano poco diverse dalle condizioni normali in principio della linea 1, fig. 3. Certo in base a questa esperienza non possiamo attribuire il male di montagna ad un disturbo meccanico che succeda nella circolazione polmonare per effetto della depressione barometrica.

I moti del respiro sono divenuti più lenti e ve ne sono 10 ogni minuto, poi improvvisamente verso al fine della linea 1, fig. 4, si rallenta la frequenza dei battiti cardiaci. Nella linea 2 della fig. 3 continua questo stato anormale delle sistoli cardiache simile ad una eccitazione del nervo vago; ma la pressione non diminuisce fino a che le sistoli diventano molto rare, come osservasi nella linea 2 della fig. 4.

(1) A. Mosso, Archives ital. de Biologie, tome XLI, pag. 384.
(2) H. Kronecker, *Die Bergkrankheit*, pag. 114.

Mantengo costante la pressione barometrica a 128 mm. perchè ero deciso ad uccidere l'animale colla depressione; ma questa altitudine di 14,200 m. non

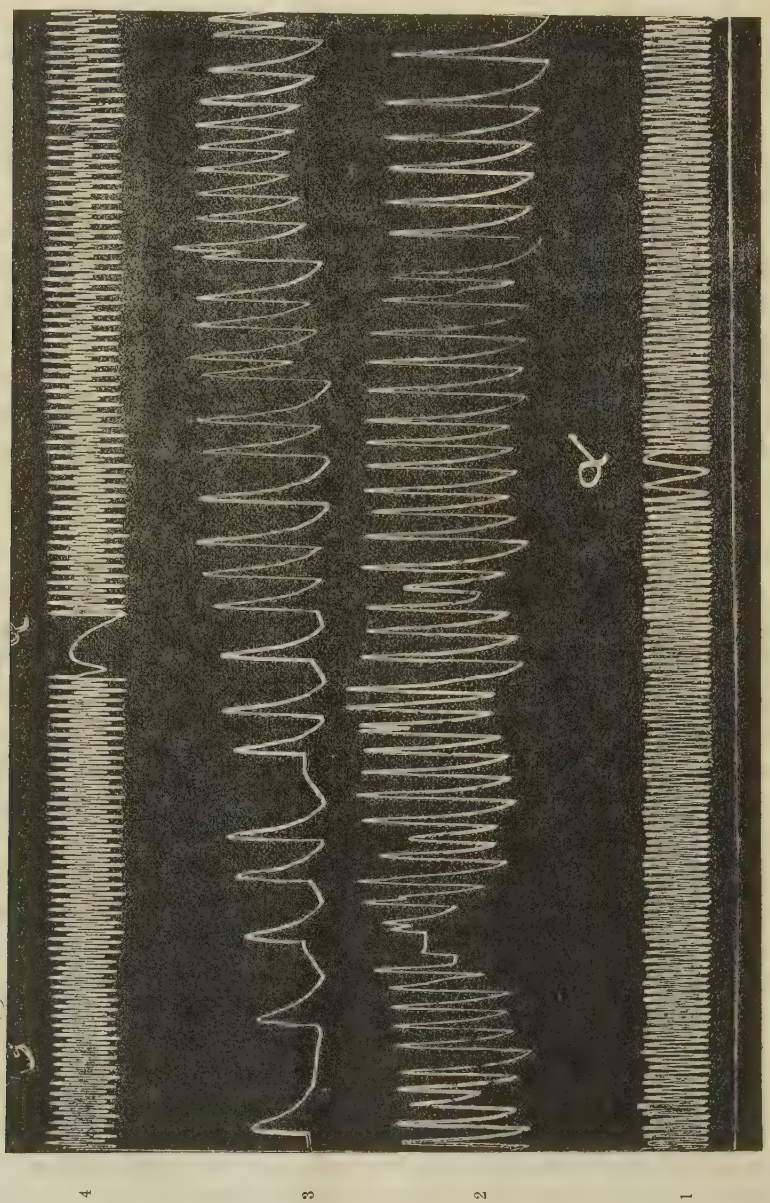

Fig. 3.

basta. Nella linea 2, fig. 3 vediamo che le condizioni non peggiorano. Nella linea 3, fig. 4 il respiro era divenuto molto raro; in R R R R sono segnate le respirazioni che il cane fa boccheggiando, come succede nell'agonia. Malgrado che il cane fosse agli estremi non si osservò nei suoi muscoli alcun moto convulsivo paragonabile a quelli caratteristici dell'asfissia.

Per provare se l'animale giunto a questo estremo poteva ancora salvarsi, ristabilisco rapidamente la pressione; il respiro cessa completamente.

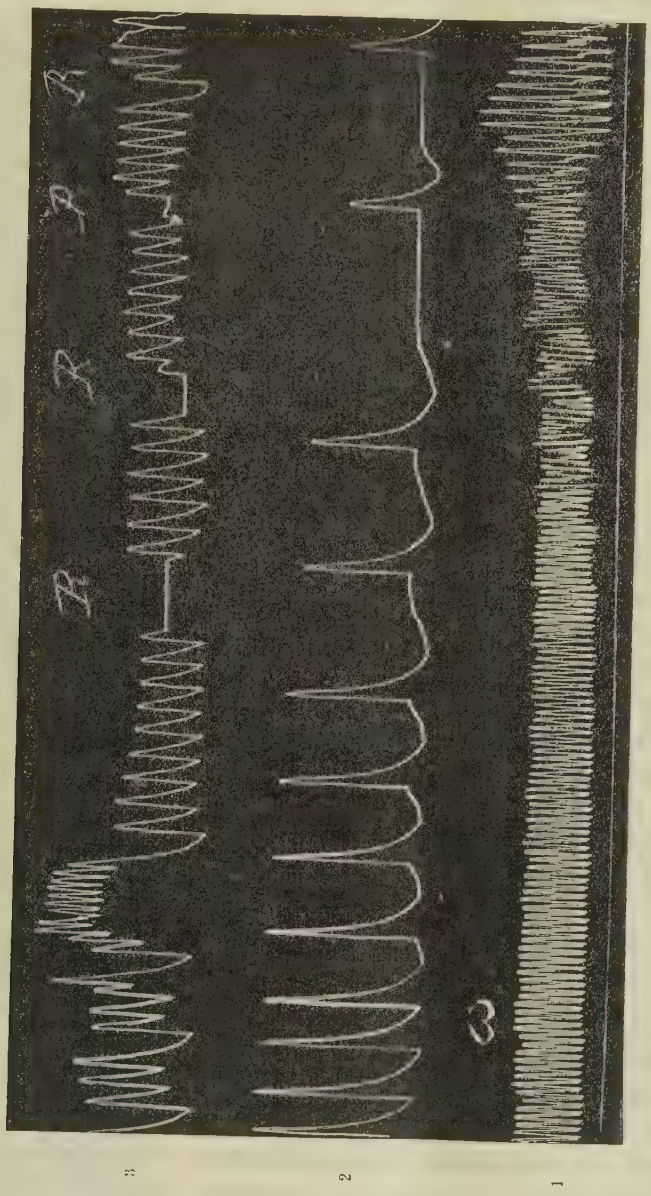

Fig. 4.

Ritornato alla presssione normale di 728 mm. in 1'30" il cuore continua a battere lentamente e poco per volta le sistoli diventano più frequenti, dopo 1',15 secondi che si trova alla pressione normale ricomincia lentamente il respiro, e 4 minuti dopo che trovasi alla pressione normale scrivo la linea 4 della fig. 3.

La pressione sanguigna che era scesa a 100 torna a 120 mm. Il polso è più lento e dicroto; nel mezzo della curva in α dove muovo il cilindro per fare un segno comincia una seconda depressione; alla fine della linea non si raggiunsero ancora 120 mm. ma il polso ha modificato la sua forma: i vasi sembrano aver acquistato una tonicità maggiore, perchè il dicrotismo tende a scomparire, ma la frequenza del polso rimane la stessa e la pressione sanguigna non cambia.

Per brevità tralascio di ricordare le modificazioni che osservansi nel cuore e nei vasi sanguigni durante l'asfissia spinta rapidamente agli estremi; ma bastano questi tracciati delle figg. 3 e 4 per concludere che i mutamenti osservati nella circolazione sanguigna durante una rapida e fortissima depressione sono diversi da quelli che si producono nell'asfissia e ciò contrariamente all'affermazione di P. Bert (1), il quale disse: « J'ai déjà insisté à plusieurs reprises sur le parallèle entre les phénomènes de la décompression et ceux de l'asphyxie en vase clos, parallèle qui se poursuit jusque dans les moindres détails ».

§ 4.

Ho fatto altre due esperienze le quali diedero i medesimi risultati e resta così confermato che nelle forti depressioni barometriche non cambia nè la pressione sanguigna, nè la frequenza delle sistoli cardiache. Il centro vasomotorio sente poco l'azione dell'aria rarefatta, mentre che i centri della respirazione sono influenzati, ma non vi è la dispnea caratteristica dell'asfissia, eccetto nell'agonia. Anche quando il cuore ed il respiro erano prossimi a fermarsi non comparvero le convulsioni. È però da notarsi che tali esperienze vennero fatte su animali profondamente cloralizzati, il che fa variare certo i risultati che avremmo ottenuti in un cane non profondamente assopito.

In altri due cani in condizioni eguali osservai un aumento della pressione come esporrò nel seguente esperimento.

Esperienza III.

5 gennaio. Un cane giovane del peso di 4800 gr. viene addormentato per mezzo del cloralio, del quale vengono successivamente iniettati 3 grammi nella cavità addominale. Pressione barometrica 728 mm.

Nella fig. 5 si scrive il tracciato normale dove la pressione letta nella scala è 100 mm. Non faccio l'ascissa a zero bastando questa indicazione; nel tracciato sono visibili le oscillazioni respiratorie. In α si sposta il cilindro per fare un segno dove comincia la depressione barometrica; nel punto segnato ω la pressione è 228 mm. L'aumento della pressione sanguigna fu di 30 mm. da 100 mm. a 130 mm.

(1) P. Bert, *Pression barométrique*, pag. 740.

Un'altra esperienza identica fatta su questo cane diede lo stesso risultato. Nell'altro cane l'aumento della pressione sanguigna per una depressione di 228 mm. pari a 9600 m. di altitudine fu minore.

Fig. 5.

Riepilogando si dovrebbe confessare che i risultati sono poco soddisfacenti. Queste esperienze servono per dimostrare che animali della medesima specie reagiscono in modo diverso ai cambiamenti di pressione; e queste discrepanze le esposi meglio in una Nota col titolo: *Differenze individuali in rapporto colla pressione parziale del* CO_2 *e dell'*O_2 *nell'aria rarefatta.*

Le differenze individuali che si osservano nell'apnea per cui alcuni individui della stessa specie (tanto nell'uomo quanto negli animali) sono più sensibili ed altri meno, sono causa delle discordanze che trovansi fra gli autori che studiarono la pressione del sangue nell'apnea. Mentre Filehne affermò che nell'apnea diminuisce la pressione sanguigna (1): « Wir mussen sowohl das Aufhören der Athmung als auch die sich hieran schliessende Drucksenkung für eine apnoische Erscheinung erklären » Knoll sostenne l'opinione contraria e disse: « Die Blutdruckcurve steigt während der Apnoe » (2).

§ 5.

Però anche negli animali che sembrano meglio resistere alle forti depressioni, si possono osservare dei mutamenti profondi nella funzione dei centri vasomotorî e del cuore, pur rimanendo costante la pressione sanguigna: questo lo vediamo nel seguente esperimento.

Esperienza IV.

11 gennaio. Un cane del peso di 5000 gr. viene cloralizzato profondamente; la

(1) W. Filehne, Archiv f. exp. Path. u. Pharmak. X Bd. pag. 457.

(2) Ph. Knoll, Sitzungsberichte d. k. Ak. d. Wiss. zu Wien, vol. 86, pag. 103.

pressione sanguigna è 130 mm. nel principio della fig. 6. Sono evidentissime le ondulazioni della pressione sanguigna dovute all'azione del centro vaso motore. Durante 5 minuti queste ondulazioni rimasero costanti nella loro forma come vedesi nella curva inferiore del presente tracciato fig. 6. In α comincia la depressione, e da 730 mm. scende (nella seguente fig. 7 che ne è la continuazione) in ω a 230 mm.; già prima che siasi raggiunta questa depressione il cuore ha modificato le sistoli e il polso che prima era più ampio sul vertice delle ondulazioni ora è divenuto uguale. Essendo rimasta invariata la pressione sanguigna è meno probabile che tale effetto si debba attribuire ad un aumento di tonicità dei vasi sanguigni. Nella fig. 7, linea 1, vediamo che le ondulazioni si allungano e diventano meno forti. Nella linea 2 delle figg. 6 e 7 le ondulazioni diventano sempre più deboli e scompariscono nell'ultima parte della linea 2 fig. 7. La pressione e la frequenza dei battiti cardiaci non cambiano. Nella linea 3 della fig. 7, il respiro diviene più forte e scompariscono nel tracciato manometrico le ondulazioni.

Nel timore che il cloralio potesse rendere meno evidente l'azione della depressione barometrica adoperai in altre esperienze il cloralosio, che come è noto, non modifica la forza ed il ritmo dei battiti cardiaci. In questa parte del mio studio se ho confermato quanto ho già esposto precedentemente, ho potuto d'altronde osservare l'influenza della depressione barometrica sul midollo spinale.

Il cloralosio produce una sovraeccitazione del midollo, cosicchè gli animali presentano dei movimenti convulsivi che rassomigliano alle contrazioni stricniche. Appena un cane avvelenato col cloralosio viene portato ad una pressione di 330 mm. o 350 mm. cessa il tremito e l'agitazione. In questa altitudine che corrisponde a 6000 metri il cloralosio agisce in modo diverso e le funzioni del midollo vengono alquanto depresse.

Completerò l'esame dei tracciati manometrici sopra esposti, con uno studio sui movimenti cardiaci nell'aria rarefatta che pubblicherò in una prossima Nota.

Io sono stato nella camera pneumatica ad una depressione barometrica corrispondente ad 11,600 metri [1] e Süring con Berson nella loro ascensione aereostatica sono giunti fino a 10,500 metri; questo prova che i disturbi nelle forti depressioni barometriche non succedono per una causa meccanica. Il primo concetto per spiegare il male di montagna fu quello di Haller [2] il quale credeva che l'aria rarefatta non dilatasse abbastanza bene i polmoni. Ho già dimostrato nel mio lavoro sull'ossido di carbonio [3] che l'aria penetra

(1) A. Mosso, *Fisiologia dell'uomo sulle Alpi*, pag. 395.

(2) A. Haller, *Elementa physiologiae*. Tomus III, pag. 196.

(3) A. Mosso, *La respirazione nelle gallerie e l'azione dell'ossido di carbonio*. Milano, 1900, pag. 316. Archives italiennes de Biologie, Tome XXXV, pag. 99.

e distende fino al massimo grado i polmoni senza incontrare alcuna resistenza nei minimi bronchi e negli alveoli.

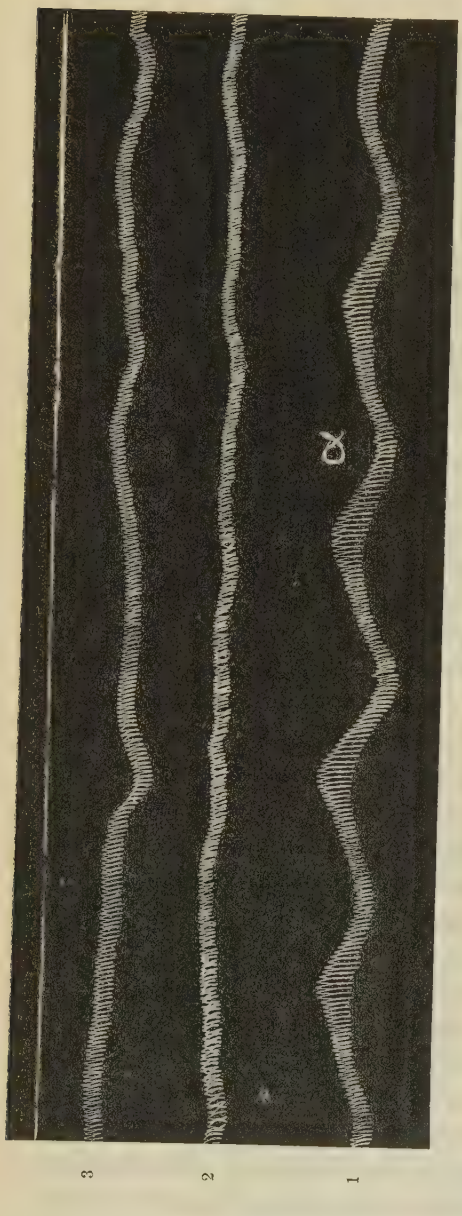

Fig 6.

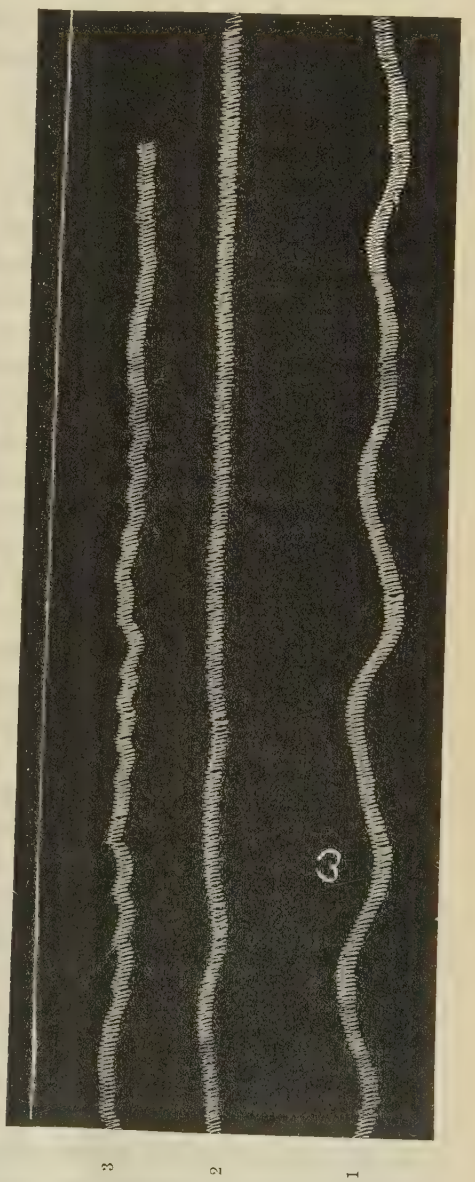

Fig. 7.

Queste esperienze sulla pressione sanguigna dalle quali risultò che anche nella depressione enorme di 128 mm. corrispondenti all'altitudine di 14,200 m. la pressione sanguigna è poco diversa dal normale, servono a stabilire in modo definitivo che la depressione barometrica non agisce in senso meccanico, ma in senso chimico sull'organismo per produrre il male di montagna.

Fisiologia. — *L'anidride carbonica come rimedio del male di montagna, e perchè nelle ascensioni aereostatiche questa debba respirarsi coll'ossigeno.* Nota del Socio Angelo Mosso.

§ 1.

Ho consigliato agli aereonauti di aggiungere dall'8 al 10 per cento di anidride carbonica all'ossigeno compresso che portano nelle ascensioni, perchè l'ossigeno non basta da solo per rimediare ai danni che subisce l'organismo durante le forti depressioni barometriche. Questa proposta derivava come una proposizione dimostrata dalle mie esperienze e trovava una conferma nel fatto che Sivel, Croce-Spinelli e Tissandier non approfittarono dell'ossigeno che avevano portato seco nell'ascensione dello *Zénith*; che Berson era sonnolento malgrado che respirasse dell'ossigeno nelle altissime regioni dell'atmosfera (1) e che Süring in altre ascensioni trovò che l'ossigeno non era sufficiente per ristabilire le condizioni normali dell'attenzione e del sistema nervoso (2). Le analisi del sangue fatte l'anno prima sulla vetta del Monte Rosa (3) mi avevano indicato questa applicazione dell'anidride carbonica. L'entità dei preparativi che feci per tale impresa, quando mi accinsi alla spedizione del 1903 sul Monte Rosa, prova come io considerassi questa applicazione come il problema più importante fra quelli che volevo risolvere. Portai ottomila litri di ossigeno nella Capanna Regina Margherita insieme a tremila litri di anidride carbonica. Le provviste di ossigeno erano contenute in due cilindri di acciaio che pesavano 21,5 chilog. ciascuno, pieni di ossigeno compresso a 120 atmosfere: avevo due altri cilindri di ferro (così detti bidoni) alti 70 centim. del diametro di 22 centim., che servivano come recipienti pei gas fino alla pressione di 12 atmosfere e poi avevo quattro cilindri più maneggevoli alti 40 centimetri col diametro di 8,5 per dare agli alpinisti che soffrissero il male di montagna. Non avendo consumato queste provviste di ossigeno, e di acido carbonico liquido, rimangono nella Capanna Regina Margherita 3000 litri di ossigeno compresso in un cilindro intatto, insieme ad un altro cilindro pure intatto di acido carbonico liquido. Avverto i colleghi che desiderassero ripetere queste esperienze, che lasciai a loro disposizione non solo queste provvigioni di ossigeno e di CO_2, ma che troveranno nella Capanna Regina Margherita, insieme ai cilindri,

(1) R. Asmann und A. Berson, *Wissenschaftliche Luftfahrten*. Bd. II, pag. 418

(2) Vedi nota precedente, Atti R. Accad. dei Lincei, 5 febbraio 1905.

(3) Mosso e Marro, Archives ital. de Biologie. Tome XXXIX, pag. 395.

quanto occorre per travasare i gas, insieme ai manometri per far le miscele e gli apparecchi di Hempel per le analisi. Il metodo che adoperai consisteva nel far le mescolanze (servendomi di un grande manometro Bourdon controllato) nei bidoni contenenti 375 litri a 12 atmosfere, e da questi le travasavo nei cilindri più piccoli che davo agli alpinisti.

Fatte le mescolanze colle indicazioni manometriche, le rettificavo e le correggevo per mezzo dell'analisi servendomi delle burette di Hempel. Per regolare la velocità dell'efflusso non volli portare apparecchi speciali: è facile sentendo il suono che produce la corrente del gas di prenderne solo la quantità che occorre, e maneggiando la chiavetta si rende un poco maggiore l'apertura quando diminuisce la pressione del gas nel cilindro.

Riferisco le osservazioni fatte per conoscere l'azione del CO_2 che discuteremo dopo.

1ª *Osservazione nella Capanna Regina Margherita* (4560 m.).

18 agosto 1903. Arriva una comitiva di quattro alpinisti e due guide. La notte avevano dormito male nella Capanna Gnifetti, dove pel cattivo tempo si erano rifugiate 24 persone: durante l'ascensione furono molestati dalla nebbia, ed arrivarono molto stanchi. Quando giunsero alla Capanna Regina Margherita uno di essi, G. F., aveva nausea e voglia di vomitare, era abbattuto e molto pallido: non avendo appetito stette tutto il giorno a letto lagnandosi di mal di capo: fu specialmente nella notte che venne molestato dal vomito così che dovette alzarsi e il custode gli fece una tazza di caffè. Il giorno dopo alle 7, i suoi colleghi mi pregano di esaminarlo: aveva passata la notte insonne: si lamentava della molesta sensazione come di un cerchio attorno la fronte: aveva 117 pulsazioni al minuto e 23 respirazioni: trovavasi in uno stato di apatia grande e di stanchezza.

Gli feci respirare la mescolanza di CO_2 8 % nell'ossigeno e mi disse di averne sollievo. Poco dopo gli diedi l'altro cilindro coll'ossigeno compresso: egli aveva imparato subito a maneggiare il robinetto e a regolare la corrente del gas secondo la sonorità del sibilo e stando seduto sul letto respirava tenendo l'imbuto davanti al naso ed alla bocca. Dopo aver respirato per un minuto l'ossigeno, disse che preferiva l'altro cilindro perchè lo faceva star meglio. Ripetemmo alternativamente la prova e sempre collo stesso successo. Alzatosi, mi assicurò che sentivasi meglio in forze. Consumò un terzo cilindro della miscela di CO_2 % e ripartì coi suoi compagni.

Seppi dopo che fermatosi alla Capanna Gnifetti in buone condizioni volle proseguire per Gressoney.

2ª *Osservazione nella Capanna Regina Margherita* (4560 m.).

23 agosto 1903. Enrico Francioli, un ragazzo di 15 anni, il figlio del custode della Capanna Regina Margherita, fece la sua prima ascensione sul Monte Rosa.

Dopo aver dormito la notte precedente nella Capanna Gnifetti arrivò con suo padre in buone condizioni alle ore 9: si coricò e alle 13 alzatosi mangiò poco e senza appetito: si lagnava di mal di capo e tornò a letto. Alle 19 alzatosi perchè soffriva di nausea, vomitò; subito accorsi per soccorrerlo e raccolsi circa 300 cc. di liquido bilioso frammisto a sostanze alimentari; il polso era 106 al minuto, il respiro irregolare da 22 a 24. Avendo pronti i due cilindri, uno coll'ossigeno compresso a 10 atmosfere, e l'altro coll' 8 % di CO_2, cominciai coll'ossigeno. Alle ore 19,30′ quando feci questa prima esperienza il polso era 104, il respiro 24 al minuto: prese l'ossigeno in abbondanza per 1 minuto e dopo, mentre continua l'inalazione, il polso scese a 90 e il respiro a 20 al minuto. Si continua la somministrazione dell'ossigeno; dopo due altri minuti conto polso 98 e respiro 22; il polso dovevo contarlo alla carotide, tanto era debole nell'arteria radiale che non si sentiva. Cessata l'inalazione dell'ossigeno dopo due minuti il polso è 106 e il respiro 26 al minuto.

19,50′. Ritornate le condizioni come erano prima gli faccio respirare una mescolanza di 10 % CO_2 nell'ossigeno. Il polso che era 106 al minuto scende a 100, il respiro da 26 a 24: le inspirazioni sono visibilmente più ampie: dopo 1 minuto si sospende. Enrico Francioli dice che questo rimedio lo ha sollevato, che si sente meglio.

19,55′. Gli facciamo respirare per due minuti la miscela 10 % CO_2 nell'ossigeno; il polso che prima non potevasi contare alla radiale ora è divenuto così forte che abbandoniamo la carotide. I vasi sanguigni della faccia che erano dilatati si restringono alquanto durante le inalazioni del CO_2. Il ragazzo ci avverte che è cessato il male di capo, il polso scende a 96, il respiro rimane a 24 ed è profondo.

20,15′. Ricomparsa la nausea, torniamo a dargli un cilindro pieno della mescolanza del 10 % di CO_2 nell'ossigeno; e lasciamo che egli se ne serva da solo dopo esserci assicurati che tornavano a ripetersi i mutamenti del polso e del respiro sopra esposti e che scompariva la nausea durante le inalazioni col CO_2.

3ª *e* 4ª *Osservazione nella Capanna Regina Margherita* (4560 m.).

24 agosto 1903. Alle ore 10 arrivano otto persone che avevano dormito all'Albergo del Col d'Olen, ma poco e male, perchè c'era molta folla: si coricarono tardi, si alzarono presto e vennero su in fretta, così che erano stanchi: due soffrivano il mal di montagna, con cefalea, avevano una grande frequenza del polso e nausea. Si coricarono tutti e dopo due ore si alzarono per far colazione: due però non avevano appetito e stettero a letto; essendo miei amici e conoscenti, cominciai alle ore 13 le osservazioni coll'ossigeno puro e colla mescolanza di CO_2 8 % nell'ossigeno.

Avevo quattro cilindri piccoli, due contenenti l'ossigeno compresso e due altri con le mescolanze di CO_2 8 % e O_2. Dopo tre ore di riposo la frequenza del polso era in uno 112 e 110 nell'altro, il respiro 26 nel primo e 24 nel secondo ad ogni minuto. Colle inalazioni di ossigeno puro diminuiva un poco la frequenza del polso e del respiro; ma l'effetto era molto più evidente colla mescolanza 8 % di CO_2 e O_2, tanto che dopo aver provato e l'uno e l'altro cilindro senza che io dicessi nulla per non suggestionarli, tutti due preferirono di respirare solo dal cilindro che conteneva la mescolanza. Si vedeva infatti che il respiro diveniva profondo e questo dava loro un sentimento di benessere e dicevano che cessava il male di capo. Il polso scendeva in entrambi da 18 a 20 pulsazioni, senza che diminuisse in modo corrispondente il ritmo del respiro che diveniva affannoso e profondo.

In due altre osservazioni che tralascio per brevità non ebbi un risultato favorevole, sia respirando l'ossigeno puro, sia respirando la mescolanza dell'8 % CO_2 nell'O_2; in un'altra persona si ebbe un miglioramento; cessò la nausea, ma non il mal di capo, quantunque consumasse due cilindri della miscela. Questo alpinista si era lagnato di sonnolenza al ghiacciaio del Grenz venendo su da Zermatt; a circa 4000 m. cominciò la stanchezza, la nausea che poi cessò. Giunto alla Capanna Regina Margherita molto esaurito, mi assicurò che il CO_2 gli dava un grande benessere e che respirando meglio scompariva il senso di oppressione e di fatica che lo teneva accasciato.

Questi risultati sono soddisfacenti. Sapendo che il male di montagna è un fenomeno tanto complesso, e che le difficoltà dell'ascensione fanno prevalere i fenomeni della fatica, io ero certo che le inalazioni di anidride carbonica non potevano essere sempre efficaci. La molestia che recava a molti entrando nella capanna l'odore della cucina e il caldo delle stufe, la grande eccitabilità e l'esaltamento in cui si trovano alcuni alpinisti alla fine di una ascensione, specialmente se il tempo era cattivo, ma più che tutto i disturbi della circolazione che si manifestano colla cianosi, fanno comprendere quanto siano complesse le cause del male di montagna. Mi ricordo di un alpinista il quale mi diceva che al colle del Lys aveva bastato la nebbia per dargli il vomito.

Di notte quando ero molestato dalla respirazione periodica, o per altre cause non potevo dormire, tenni sotto il capezzale un cilindro con ossigeno compresso e 8 % CO_2, quando mi svegliavo aprivo leggermente la chiavetta in modo che uscisse una debole corrente di gas che respiravo coll'imbuto di guttaperca messo vicino alla faccia e spesso mi addormentai in questo modo sentendone un grande sollievo.

§ 2.

Somministrazione del CO_2 nelle forti depressioni barometriche.

Esperienze sulle scimmie.

Nell'intento di promuovere le applicazioni del CO_2 nelle ascensioni aereostatiche sperimentai sulle scimmie. Il dott. A. Aggazzotti studiò sopra un orang-utang (*Simia satyrus*) le mescolanze di CO_2 quando la rarefazione dell'aria giunge a tali estremi da mettere in pericolo la vita e pubblicherà in una prossima Nota i risultati di queste esperienze: qui mi limito a dire quanto osservai sulle scimmie scegliendo alcuni esempi fra le molte prove che feci in riguardo.

16 marzo 1904. Pressione 740 mm. Temperatura 18°. Una scimmia maschio della specie *Macacus sinicus* che pesa 4 chilog. arrivata da Genova tre giorni prima, viene messa sotto la campana; è un animale molto vispo e selvaggio, col quale dobbiamo lottare non poco per condurlo dalla stalla nel laboratorio e metterlo sotto la campana. Aspettiamo 15 minuti perchè si calmi; ma anche sotto la campana batte il capo contro le pareti cercando di fuggire. Non potendo contare il respiro, cominciamo la rarefazione dell'aria alle ore 9,32′.

Ore 9,40′. Pressione 359 mm. Respiro 50 al minuto. Comincia a dormire. Di quando in quando chiude gli occhi, si appoggia alle pareti della campana e sbadiglia.

Ore 9,42′. Frequenza del respiro = 58 al minuto, dorme bene, sta incurvata all'innanzi colla testa fra le gambe.

Ore 9,43′. Diamo CO_2. Il respiro diviene più forte e frequente. L'animale si sveglia, e sta meglio. Lasciamo che la pressione diminuisca, essa giunge fino a 280 mm., mentre si continua ad amministrare il CO_2 e le condizioni della scimmia non peggiorano, la frequenza del respiro è 64 al minuto.

Ore 9,45′. Pressione = 239 mm. che corrisponde all'altezza di 9497 m. La scimmia sta bene. Frequenza del respiro 72 al minuto. Prendiamo un campione di aria colle due pipette piene di mercurio. Fatta l'analisi troviamo 12 % CO_2; pressione parziale 28,6 mm. Hg. Cessata l'amministrazione di CO_2 lasciamo che funzionino le pompe; a misura che l'aria si rinnova e scema la pressione parziale del CO_2 tornano a peggiorare le condizioni della scimmia.

Ore 9,52′. La scimmia cadde poco per volta accasciata, ora giace distesa, e dorme, se apre gli occhi il suo sguardo è istupidito. Frequenza del respiro 70 al minuto; pressione = 330 mm.

Ore 9,56′. Continua a dormire. Frequenza del respiro 62 in un minuto.

Ore 10,5′. Lasciai che la scimmia rimanesse per circa 20 minuti alla pressione di 239 mm. per vedere se le condizioni sue cambiassero, ma non vidi alcun mutamento. La scimmia aveva un atteggiamento insolito stando sulle quattro zampe, mentre col naso toccava l'asciugamani messo sulla pietra di marmo, sulla quale poggia la campana. Frequenza del respiro 48 in un minuto.

Ore 10,15′. Continua la depressione a 239 mm. la corrente dell'aria dentro la campana è forte. La scimmia continua a dormire, non ha cambiato di posizione, qualche volta

apre gli occhi, ma è apatica. Picchiando colla nocca delle dita sulla campana guarda. ma senza interessarsi a ciò che succede.

Ore 10,16′. Amministriamo l'ossigeno. La scimmia non si sveglia. La frequenza del respiro che era 40 al minuto scese a 36 al minuto. Questa fu la sola differenza, lo stato di torpore e di sonno non si è modificato: non cambiò posizione e non si è svegliata.

Ore 10,26′. Continua a passare l'ossigeno insieme all'aria in modo da avere una corrente ricca di questo gas sotto la campana, il respiro scende a 34 al minuto, ma l'animale non si sveglia. Prendiamo un campione di aria colle pipette piene di mercurio. Fatta l'analisi troviamo 41 °|₀ O_2. La pressione parziale era 97 mm. Hg., invece che era 155 mm. Hg nell'atmosfera a 740 mm.

Ore 10,37′. Respiro 44 in 30. Dorme sempre nella stessa posizione. Lasciamo che si rinnuovi l'aria e sospendiamo la somministrazione dell'ossigeno.

Facciamo un'altra esperienza per conoscere l'azione del CO_2. Riempio di questo gas una boccia graduata della capacità di 3 litri la quale comunica con altra boccia uguale piena di acqua satura di cloruro sodico: un tubo di gomma messo sul fondo delle due boccie permette di far passare con facilità il CO_2 sotto la campana.

Ore 10,45′. Pressione 220 mm., frequenza del respiro 42 al minuto: la scimmia è accucciata, il sonno tanto profondo che non riusciamo a destarla battendo colla nocca delle dita sulla campana. Le somministriamo tre litri di CO_2: subito cambia di aspetto, il respiro diviene profondo, 64 al minuto. L'animale non solo si è destato, ma gira per la campana con atteggiamenti normali e sembra che la spossatezza sia scomparsa.

Ore 10,48′. Finita l'amministrazione dei tre litri di CO_2, lasciando che funzionino le pompe si rinnova l'aria, e poco per volta la scimmia si rimette a dormire, dopo di essere prima divenuta più calma ed apatica. Respiro 62 in un minuto, oscillazioni del tronco e della testa, movimenti anormali delle braccia fino a che la scimmia cade. Pressione 220 mm.

Ore 10,52′. Cessa l'esperienza e si ritorna alla pressione normale.

Riepilogando: in questa scimmia non si è prodotto il vomito nell'altitudine di 9225 m., invece lo vedremo succedere in altre due scimmie per delle altezze molto minori: questo è quanto osservasi nell'uomo che nelle ascensioni aereostatiche il vomito può talora mancare anche quando si toccano i 10,000 metri, mentre in altre circostanze viene ad altezze notevolmente più basse.

La depressione delle forze e la sonnolenza si producono nelle scimmie come nell'uomo quando agisce l'aria rarefatta. L'anidride carbonica fa scomparire questo malessere, e ristabilisce le funzioni psichiche nella loro integrità, mentre che l'ossigeno da solo non produce un eguale miglioramento.

Ripetendo queste esperienze sulla medesima scimmia ed in altre, osservai che l'azione dell'anidride carbonica si svolge molto più presto che non quella dell'ossigeno. Il ritardo che constatai nel miglioramento delle scimmie quando amministravamo l'ossigeno, si può forse spiegare pensando che l'anidride car-

bonica eccita immediatamente la cellula nervosa nella sua costituzione attuale, mentre che l'ossigeno deve anzitutto ricostituire la sostanza della cellula nervosa, e forse provvedere alla distruzione di prodotti tossici poco ossidati.

§ 3.

Esperienze sotto la campana pneumatica fatte sulle due scimmie che portai al Monte Rosa (1).

1° settembre 1903. Pressione 749 mm. temp. 23. Scimmia femmina messa sotto la grande campana: alle ore 3,10′ fa 44 respirazioni al minuto dopo essere rimasta 15 minuti tranquilla.

Ore 3,13′. Incomincia la rarefazione dell'aria, alle ore 3,23′ la pressione è di 459 mm. e la scimmia ha ripetutamente degli sforzi di vomito senza rigettare il contenuto dello stomaco.

È importante vedere che questa scimmia la quale non aveva mai vomitato nella Capanna Regina Margherita a 425 mm. e 430 mm., ora vomita a 459 mm. Ciò prova che passando rapidamente (cioè in 10 minuti) dalla pressione di 749 mm. all'altezza inferiore al Monte Rosa succede il vomito, mentre questo manca quando gli animali hanno tempo ad acclimatarsi.

Ore 3,30′. Facciamo passare del CO_2 sotto alla campana mentre funzionano le pompe e rimane costante la pressione a 459 mm., il vomito cessa e la respirazione diviene più forte. La scimmia che prima sembrava abbattuta diviene più sveglia ed allegra e si interessa ad un cane che trovasi nella stanza.

Ore 3,44′. Continua a passare contemporaneamente la corrente del CO_2 insieme all'aria mentre rimane costante la pressione. Un campione d'aria preso con le pipette piene di mercurio, unite da un lungo tubo in modo da superare la depressione barometrica, contiene $CO_2 = 1{,}44'$ %.

Ore 3,45′. Rendesi maggiore la depressione diminuendo l'accesso dell'aria mentre le pompe funzionano come prima; arrivata a 409 mm. mentre continua l'accesso del CO_2 la scimmia sta bene, si sceglie fra i peli le pulci ed ha l'aspetto normale.

Ore 3,65′. Si fa crescere lentamente la pressione sino che siasi tornati a 749 mm.

Scimmia maschio.

Facciamo immediatamente dopo una esperienza uguale sul maschio. Frequenza del respiro 50 al minuto. Si aspetta 10 minuti finchè sia in riposo.

Ore 4,35′. Comincia la rarefazione dell'aria, 4,47′ pressione 379 mm. Respiro 54. Appena giunta a questa depressione la scimmia fece un movimento fuori del comune, come di vertigine, forse fu uno degli oscuramenti della vista che succedono nella campana pneumatica e che soffrono gli aereonauti a grandi altezze; la scimmia allunga le mani e le braccia come se cercasse un appoggio, ma subito dopo tornò come prima stando seduta ed immobile; a 219 mm. di pressione sembrò dar segno di nausea, allungò un poco il muso, ma non successe altro. La faccia era meno espressiva ed un po' sonnolenta.

(1) A. Mosso, Archives ital. de Biologie. Tome XLI, pag. 397.

Ore 4,53′. Pressione 269 mm. Nausea. Vomito ripetuto con materie non digerite. Dopo la scimmia si mostra abbattuta e tiene gli occhi chiusi; di quando in quando abbassa la testa. Respiro superficiale 55 al minuto.

Ore 4,54′. Diamo l'anidride carbonica, il respiro si rinforza ma non si accelera. Cessa il vomito: la faccia diviene più intelligente, scompare la sonnolenza: il respiro diviene ansante. Si prende un campione nel solito modo e fatta l'analisi troviamo $CO_2 = 9{,}25$ %.

Lasciamo funzionare le pompe senza aggiungere CO_2, l'aria si rinnova, e tornando a diminuire la tensione del CO_2 la scimmia diviene sonnolenta.

Ore 5,16′. Vomita ripetutamente alla stessa pressione di 269 mm.

Ore 5,17′. Diamo CO_2 e la scimmia subito sta meglio, diventa più vivace ed intelligente, non ha più nausea, nè vomito. Respira profondamente 99 volte al minuto.

Ore 5.20′. Lasciamo funzionare le pompe fino a che l'aria sia rinnovata e ricomparisce la sonnolenza.

Ore 5,23′. Produco una depressione barometrica maggiore = 230 mm.: la scimmia ricade in un malessere grave con sintomi di nausea e sforzi di vomito ripetuti.

Ore 5,24′. Invece del CO_2 somministro dell'ossigeno. Pressione = 300 mm. Vomita ancora mentre penetra l'ossigeno: però subito dopo sta meglio.

Ore 5.28′. Continua a passare l'ossigeno, pressione 300 mm. Non è più tornato il vomito; la scimmia è meno abbattuta, è scomparsa la sonnolenza; indubbiamente sta meglio dopo che facemmo aumentare la pressione parziale dell'ossigeno.

Ore 5,30′. Prendiamo un campione per mezzo delle pipette a mercurio: fatta l'analisi dell'aria troviamo che conteneva 38,95 % O_2. La pressione parziale dell'$O_2 = 116$ mm. Hg mentre prima nell'aria libera era = 157 mm. Hg.

Le grandi differenze individuali per la facilità più o meno grande colla quale si produce il vomito risultano evidenti. La femmina soffrì il vomito alla pressione di 459 mm.: il maschio dovette giungere alla depressione di 269 mm. prima che si ottenesse il medesimo effetto: vedemmo pure che la rapidità colla quale succede la depressione barometrica ha una influenza sui disturbi che essa produce; perchè mentre la scimmia femmina fu portata sulla vetta del Monte Rosa senza che soffrisse mai il vomito, messa sotto la campana pneumatica e arrivata in 10 minuti alla stessa pressione, essa vomita.

La somministrazione del CO_2 alle scimmie quando soffrono per la depressione barometrica si è mostrata efficace come rimedio in tutte le esperienze qui riprodotte, perchè cessava non solo il vomito quando le scimmie respiravano dell'aria ricca di CO_2, ma scomparivano la depressione delle forze, e la sonnolenza, e le scimmie prendevano un'espressione più allegra e vivace.

Anche l'ossigeno amministrato alle scimmie mentre soffrivano per la depressione barometrica ed era comparso il vomito, si mostrò efficace.

Io avevo già fatto queste esperienze nel 1903 quando il 30 gennaio 1904 Bohr pubblicò nel *Centralblatt für Physiologie* le sue indagini sulla influenza che la tensione dell'anidride carbonica esercita sull'assorbimento dell'ossigeno, nel sangue. Mentre alla pressione ordinaria dell'atmosfera anche dosi notevoli di CO_2 hanno debole influenza sull'assorbimento dell'ossigeno, Bohr trovò che

nell'aria rarefatta quando è piccola la tensione dell'ossigeno, il CO_2 esercita invece un'azione intensa sull'assorbimento dell'ossigeno nel sangue. Per dare un esempio del modo col quale la somministrazione del CO_2 serve in certo qual modo ad estrarre l'ossigeno del sangue, ricorderò qualche cifra presa dalle tabelle del Bohr. Il sangue con 20 mm. di tensione dell' O_2 sopra 67 % di O_2 è già saturo quando la tensione del CO_2 è 5 millimetri; se invece la tensione del CO_2 è uguale a 80 millimetri, bastano solo 17 per cento di O_2 onde saturare il sangue.

Secondo questa legge scoperta dal Bohr l'aggiunta di CO_2 all'aria respirata diviene utile quando è debole la pressione parziale dell'ossigeno, perchè a questo modo si utilizzano delle provviste di questo gas nel sangue, che prima rimanevano inerti.

Un'altra causa rende utile il CO_2 nell'aria rarefatta, e questa è la diminuita tensione che ha l'anidride carbonica nel sangue quando diminuisce fortemente la pressione barometrica. Le analisi del sangue che feci col dott. Marro nella Capanna Regina Margherita non lasciano dubbio su questo fatto (1) perchè in quell'altezza diminuiscono contemporaneamente l'ossigeno e il CO_2 del sangue arterioso. Si aggiunge una terza ragione trovata dal prof. Galeotti. Sappiamo dalle determinazioni dell' alcalinità del sangue (2) sulla vetta del Monte Rosa che la diminuzione dell'alcalinità del sangue nell'uomo e sugli animali scende al 36 e al 44 %. Anche questa modificazione profonda della crasi sanguigna mostra perchè sia utile l'aggiunta di CO_2 nell'aria respirata per compensare l'anidride carbonica deficiente nel sangue.

Meccanica. — *Sull'equilibrio elastico di un corpo limitato da un cono di rotazione.* Nota di Orazio Tedone, presentata dal Socio V. Volterra.

1. *Caso in cui in superficie son dati gli spostamenti.* — Fra i casi in cui il problema dell' equilibrio elastico si risolve abbastanza semplicemente, applicando i soliti principii di cui ci siamo serviti molte altre volte (3), si deve annoverare anche quello di un corpo isotropo, limitato da un cono di rotazione. In questa Nota ci proponiamo appunto di indicarne la soluzione rapidamente.

Ricordiamo che, se sulla superficie di un corpo elastico, isotropo, defor-

(1) Mosso e Marro, Archives ital. de Biologie. Tome XXXIX, pag. 395.

(2) Galeotti, Archives ital. de Biologie. Tome XLI, pag. 80.

(3) Vedi p. es.: *Sul probl. dell'equil. elast. di un cilindro circol. indef.*; *Sul probl. dell'equil. elast. di un elliss. di rotaz.* (Rendiconti della R. Acc. dei Lincei, vol. XIII, 1° sem. 1904, pag. 232, e vol. XIV, 1° sem. 1905, pag. 76.

mato e in equilibrio sono dati gli spostamenti u, v, w, il problema consiste nel costruire l'espressione

$$(1) \qquad u = \frac{1}{4\pi}\int_\sigma u\frac{dG}{dn}\,d\sigma - \frac{\lambda+\mu}{2\mu}x\theta + \frac{\lambda+\mu}{8\pi\mu}\int_\sigma \xi\theta\frac{dG}{dn}\,d\sigma,$$

e le analoghe in v e w, nell'ipotesi che la funzione armonica θ (dilatazione elementare), inerente al problema, sia momentaneamente nota e nel determinare poi θ in modo che sia identicamente:

$$(2) \qquad \frac{3\lambda+5\mu}{2\mu}\theta + \frac{\lambda+\mu}{2\pi}\left(x\frac{\partial\theta}{\partial x}+y\frac{\partial\theta}{\partial y}+z\frac{\partial\theta}{\partial z}\right) -$$
$$-\frac{\lambda+\mu}{8\pi\mu}\left(\frac{\partial}{\partial x}\int_\sigma \xi\theta\frac{dG}{dn}\,d\sigma + \frac{\partial}{\partial y}\int_\sigma \eta\theta\frac{dG}{dn}\,d\sigma + \frac{\partial}{\partial z}\int_\sigma \zeta\theta\frac{dG}{dn}\,d\sigma\right) =$$
$$= \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial}{\partial x}\int_\sigma u\frac{dG}{dn}\,d\sigma + \frac{\partial}{\partial y}\int_\sigma v\frac{dG}{dn}\,d\sigma + \frac{\partial}{\partial z}\int_\sigma w\frac{dG}{dn}\,d\sigma\right).$$

Il significato dei simboli, in queste formole, è quello solito: σ è la superficie del corpo, G la funzione di Green il cui uso qui, come nelle Note citate, è limitato a rappresentare speditamente una funzione armonica che in superficie acquista dati valori, n la normale interna a σ, λ e μ le costanti di Lamé, e ξ, η, ζ i valori di x, y, z su σ.

Supponiamo ora che il nostro cono abbia per asse di rotazione l'asse x e per vertice l'origine delle coordinate e limitiamoci a considerare il caso in cui il corpo elastico sia limitato da quella falda della superficie conica che contiene nell'interno la direzione positiva dell'asse x, sebbene, lo avvertiamo subito, questa soluzione si estenda, senza difficoltà, al caso più generale in cui il corpo elastico è limitato, in un modo qualunque, solo da superficie coniche di rotazione aventi lo stesso vertice e lo stesso asse.

Introduciamo il sistema di coordinate curvilinee:

$$(3) \quad x = e^l t\ ,\ y = e^l\sqrt{1-t^2}\cos\psi\ ,\ z = e^l\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{sen}\,\psi,\ 0 < t \leq 1.$$

L'equazione della superficie conica che limita il nostro corpo, sarà allora $t = t_0$ con $0 < t_0 < 1$ e per avere tutti i punti del corpo elastico basterà far variare l da $-\infty$ a $+\infty$, t da t_0 a $+1$ e ψ da 0 a 2π.

Supponiamo ora che sulla superficie $t = t_0$ sia data una funzione $\theta(l, \psi)$ la quale sia sottoposta alle condizioni che per $l = -\infty$, ossia al vertice del cono, qualunque sia la generatrice su cui ci muoviamo, converga verso uno stesso valore finito, indipendente quindi da ψ, e che per $l = +\infty$ si annulli almeno come e^{-2l}; sul resto della superficie conica, $\theta(l, \psi)$ si suppone sviluppabile in serie di Fourier rispetto a ψ, rappresentabile con l'in-

tegrale di Fourier rispetto ad l ed avente, rispetto a quest'ultima variabile, derivate finite. Si potrà allora porre

$$(4) \qquad \theta(l,\psi) = e^{-\frac{l}{2}} \sum_0^\infty{}_m \left[\theta_m(l)\cos m\psi + \bar{\theta}_m(l)\operatorname{sen} m\psi\right],$$

e ne verrà che, per $l = -\infty$, le θ_m, $\bar{\theta}_m$ si annulleranno come $e^{\frac{l}{2}}$ almeno e, per $l = +\infty$, come $e^{-\frac{3l}{2}}$ almeno. Com'è noto, la funzione armonica e regolare nell'interno del cono che acquista in superficie i valori (4), sarà rappresentata dalla formola

$$(5) \quad \frac{e^{-\frac{l}{2}}}{2\pi} \sum_0^\infty{}_m \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{K}_m(t,i)}{\mathrm{K}_m(t_0,i)}\, di \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\theta_m(\varrho)\cos m\psi + \bar{\theta}_m(\varrho)\operatorname{sen} m\psi\right] \cos i(l-\varrho)\, d\varrho,$$

dove $\mathrm{K}_m(t,i) = (1-t^2)^{\frac{m}{2}} \dfrac{d_m \mathrm{K}_0(t,i)}{dt^m}$ e $\mathrm{K}_0(t,i) = \mathrm{K}(t,i)$ è la nota funzione di Mehler, la quale è definita, a meno di un fattore costante, come l'integrale dell'equazione

$$(1-t^2)\frac{d^2\mathrm{K}}{dt^2} - 2t\frac{d\mathrm{K}}{dt} - \left(i^2 + \frac{1}{4}\right)\mathrm{K} = 0$$

che, per $t = +1$ e per ogni valore di i, è finito. Il fattore costante si sceglie in modo che sia

$$\mathrm{K}(t,i) = \mathrm{F}\left(\frac{1}{2} + i\sqrt{-1}\,,\ \frac{1}{2} - i\sqrt{-1}\,,\ 1\,,\ \frac{1-t}{2}\right) =$$
$$= 1 + (4i^2+1)\frac{1-t}{2^3} + \frac{(4i^2+1)(4i^2+3^2)}{(2!)^2}\frac{(1-t)^2}{2^6} + \cdots$$
$$\cdots + \frac{(4i^2+1)(4i^2+3^2)\ldots(4i^2+(2r-1)^2)}{(r!)^2}\frac{(1-t)^r}{2^{3r}} + \cdots$$

e dove il simbolo F è il solito simbolo della serie ipergeometrica.

2. Per risolvere ora il nostro problema poniamo:

$$(6) \qquad \frac{1}{4\pi}\int_\sigma u\frac{d\mathrm{G}}{dn}\,d\sigma = \frac{e^{-\frac{l}{2}}}{2\pi}\sum_0^\infty{}_m \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{K}_m(t,i)}{\mathrm{K}_m(t_0,i)}\,di \times$$
$$\times \int_{-\infty}^{+\infty} \left[u_m(\varrho)\cos m\psi + \bar{u}_m(\varrho)\operatorname{sen} m\psi\right]\cos i(l-\varrho)\,d\varrho$$

e valgano per $\dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_\sigma v\frac{d\mathrm{G}}{dn}\,d\sigma$, $\dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_\sigma w\frac{d\mathrm{G}}{dn}\,d\sigma$ le espressioni analoghe che si ottengono dalla precedente ponendo, al posto di $u_m(\varrho)$, $\bar{u}_m(\varrho)$, rispettivamente:

$v_m(\varrho)$, $\overline{v}_m(\varrho)$; $w_m(\sigma)$, $\overline{w}_m(\varrho)$. I valori di queste funzioni $u_m(\varrho) \ldots \overline{w}_m(\varrho)$ si devono ritenere noti e ricavati dai dati valori di u, v, w su σ che noi supponiamo soddisfacenti alle condizioni generali enunciate nel numero precedente. Cerchiamo ora di soddisfare al problema assumendo i valori che θ acquista su σ sotto la forma (4) e quindi i valori stessi che θ acquista in tutto il corpo elastico, sotto la forma (5). La possibilità di determinare le $\theta_m, \overline{\theta}_m$ in modo che le ipotesi fatte su θ sieno verificate può essere dedotta dalla verifica della soluzione a *posteriori*.

Se, come abbiamo detto, i valori di θ sono dati dalla (5), si trova subito pure:

$$
\left|\begin{aligned}
&\frac{1}{4\pi}\int_\sigma \xi\theta\,\frac{dG}{dn}\,d\sigma = \frac{t_0\,e^{-\frac{l}{2}}}{2\pi}\sum_0^\infty{}_m \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{K_m(t,i)}{K_m(t_0,i)}\,di\,\times \\
&\qquad\qquad \times\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\varrho}\left[\theta_m(\varrho)\cos m\psi + \overline{\theta}_m(\varrho)\,\mathrm{sen}\,m\psi\right]\cos i(l-\varrho)\,d\varrho, \\
&\frac{1}{4\pi}\int_\sigma \gamma_1\theta\,\frac{dG}{dn}\,d\sigma = \frac{\sqrt{1-t_0^2}\,e^{-\frac{l}{2}}}{2\pi}\left\{\cos\psi\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{K_1(t,i)}{K_1(t_0,i)}\,di\,\times\right. \\
&\qquad\qquad \times\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\varrho}\theta_0(\varrho)\cos i(l-\varrho)\,d\varrho + \tfrac{1}{2}\sum_1^\infty{}_m\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{K_{m+1}(t,i)}{K_{m+1}(t_0,i)}\,di\,\times \\
&\qquad \times\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\varrho}\left[\theta_m(\varrho)\cos(m+1)\psi + \overline{\theta}_m(\varrho)\,\mathrm{sen}\,(m+1)\psi\right]\cos i(l-\varrho)\,d\varrho + \\
&\qquad\qquad + \tfrac{1}{2}\sum_1^\infty{}_m\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{K_{m-1}(t,i)}{K_{m-1}(t_0,i)}\,di\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\varrho}\left[\theta_m(\varrho)\cos(m-1)\psi + \right. \\
&\qquad\qquad\qquad \left.\left. + \overline{\theta}_m(\varrho)\,\mathrm{sen}\,(m-1)\psi\right]\cos i(l-\varrho)\,d\varrho\right\}, \\
&\frac{1}{4\pi}\int_\sigma \zeta\theta\,\frac{dG}{dn}\,d\sigma = \frac{\sqrt{1-t_0^2}\,e^{-\frac{l}{2}}}{2\pi}\left\{\mathrm{sen}\,\psi\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{K_1(t,i)}{K_1(t_0,i)}\,di\,\times\right. \\
&\qquad\qquad \times\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\varrho}\theta_0(\varrho)\cos i(l-\varrho)\,d\varrho + \tfrac{1}{2}\sum_1^\infty{}_m\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{K_{m+1}(t,i)}{K_{m+1}(t_0,i)}\,di\,\times \\
&\qquad \times\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\varrho}\left[\theta_m(\varrho)\,\mathrm{sen}\,(m+1)\psi - \overline{\theta}_m(\varrho)\cos(m+1)\psi\right]\cos i(l-\varrho)\,d\varrho + \\
&\qquad\qquad + \tfrac{1}{2}\sum_1^\infty{}_m\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{K_{m-1}(t,i)}{K_{m-1}(t_0,i)}\,di\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\varrho}\left[-\theta_m(\varrho)\,\mathrm{sen}\,(m-1)\psi + \right. \\
&\qquad\qquad\qquad \left.\left. + \overline{\theta}_m(\varrho)\cos(m-1)\psi\right]\cos i(l-\varrho)\,d\varrho\right\}
\end{aligned}\right. \tag{7}
$$

e tutti i termini che compaiono nelle (1) sono costruiti. Si tratta ora, come al solito, di determinare le $\theta_m, \overline{\theta}_m$ in modo che sia soddisfatta identicamente

la (2). Osserviamo perciò che:

$$\frac{\partial}{\partial x} = e^{-l}\left[t\frac{\partial}{\partial l} + (1-t^2)\frac{\partial}{\partial t}\right],$$
$$\frac{\partial}{\partial y} = e^{-l}\left[\sqrt{1-t^2}\left(\frac{\partial}{\partial l} - t\frac{\partial}{\partial t}\right)\cos\psi - \frac{\operatorname{sen}\psi}{\sqrt{1-t^2}}\frac{\partial}{\partial \psi}\right],$$
$$\frac{\partial}{\partial z} = e^{-l}\left[\sqrt{1-t^2}\left(\frac{\partial}{\partial l} - t\frac{\partial}{\partial t}\right)\operatorname{sen}\psi + \frac{\cos\psi}{\sqrt{1-t^2}}\frac{\partial}{\partial \psi}\right]$$

e che quindi:

$$x\frac{\partial\theta}{\partial x} + y\frac{\partial\theta}{\partial y} + z\frac{\partial\theta}{\partial z} = \frac{\partial\theta}{\partial l} = -\frac{\theta}{2} +$$

$$+\frac{e^{-\frac{l}{2}}}{2\pi}\sum_0^\infty{}_m\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{K_m(t\,,i)}{K_m(t_0\,,i)}\,di\int_{-\infty}^{+\infty}[\theta'_m(\varrho)\cos m\psi + \bar\theta'_m(\varrho)\operatorname{sen} m\psi]\cos i(l-\varrho)\,d\varrho,$$

$$\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial}{\partial x}\int_\sigma \xi\theta\frac{dG}{dn}\,d\sigma + \frac{\partial}{\partial y}\int_\sigma \eta\theta\frac{dG}{dn}\,d\sigma + \frac{\partial}{\partial z}\int_\sigma \zeta\theta\frac{dG}{dn}\,d\sigma\right)_{t=t_0} =$$
$$= e^{-\frac{l}{2}}\sum_0^\infty{}_m[\theta'_m(l)\cos m\psi + \bar\theta'_m(l)\operatorname{sen} m\psi] +$$
$$+\tfrac{3}{2}\,e^{-\frac{l}{2}}\sum_0^\infty{}_m[\theta_m(l)\cos m\psi + \bar\theta_m(l)\operatorname{sen} m\psi]$$
$$+\frac{l_0(1-t_0^2)}{2\pi}\,e^{-\frac{3l}{2}}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial}{\partial l_0}\log\frac{K_0(t_0\,,i)}{K_1(t_0\,,i)}\,di\int_{-\infty}^{+\infty}e^{\varrho}\theta_0(\varrho)\cos i(l-\varrho)\,d\varrho +\right.$$
$$+\tfrac{1}{2}\sum_1^\infty{}_m\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial}{\partial t_0}\log\frac{K_m^2(t_0\,,i)}{K_{m+1}(t_0\,,i)\,K_{m-1}(t_0\,,i)}\,di\times$$
$$\left.\times\int_{-\infty}^{+\infty}e^{\varrho}\,[\theta_m(\varrho)\cos m\psi + \bar\theta_m(\varrho)\operatorname{sen} m\psi]\cos i(l-\varrho)\,d\varrho\right\}.$$

Allo stesso modo si pongono i valori che assume il secondo membro per $t = t_0$ sotto la forma

$$e^{-\frac{3l}{2}}\sum_0^\infty{}_m[f_m(l)\cos m\psi + \bar f_m(l)\operatorname{sen} m\psi].$$

Tenendo conto dei risultati ottenuti, la (2), per $t = t_0$, ci dà:

$$(8)\quad\begin{cases} e^l\theta_0(l) - \dfrac{\lambda+\mu}{\lambda+3\mu}\,\dfrac{t_0(1-t_0^2)}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial}{\partial t_0}\log\frac{K_0(t_0\,,i)}{K_1(t_0\,,i)}\,di\times \\ \qquad\qquad\times\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}e^{\varrho}\theta_0(\varrho)\cos i(l-\varrho)\,d\varrho = \frac{2\mu}{\lambda+3\mu}\,f_0(l), \\ e^l\theta_m(l) - \dfrac{\lambda+\mu}{\lambda+3\mu}\,\dfrac{t_0(1-t_0^2)}{4\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial}{\partial t_0}\log\frac{K_m^2(t_0\,,i)}{K_{m+1}(t_0\,,i)\,K_{m-1}(t_0\,,i)}\,di\times \\ \qquad\qquad\times\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}e^{\varrho}\theta_m(\varrho)\cos i(l-\varrho)\,d\varrho = \frac{2\mu}{\lambda+3\mu}\,f_m(l), \end{cases}$$

e ad equazioni analoghe soddisfano le $\overline{\theta}_m(l)$. Colla formola data nella Nota citata sul cilindro circolare si ricavano da queste equazioni $e^l\theta_m(l)$, $e^l\overline{\theta}_m(l)$ e quindi θ_m e $\overline{\theta}_m$; ed il problema si può ritenere risoluto completamente. Questo procedimento richiede, come abbiamo detto in tutti i casi analoghi, una verifica, ma questa noi la rimandiamo ad un'altra occasione.

3. *Cenno sul caso in cui son date le tensioni in superficie.* — Se, come al solito, indichiamo con $\varpi_1, \varpi_2, \varpi_3$ le componenti della rotazione elementare e poniamo per i valori in superficie:

$$(9)\qquad (\varpi_i)_{t=t_0} = e^{-\frac{l}{2}} \sum_0^\infty{}_m \left[\varpi_{i,m}(l)\cos m\psi + \overline{\varpi}_{i,m}(l)\operatorname{sen} m\psi\right],\quad i = 1, 2, 3,$$

mentre supponiamo che i valori che θ acquista sulla superficie, sien dati sempre dalla (4), possiamo subito costruire le funzioni armoniche e regolari nell'interno del cono: θ; $\varpi_1, \varpi_2, \varpi_3$. Tenendo conto allora che:

$$\cos nx = \sqrt{1-t_0^2}\quad ,\cos ny = -t_0\cos\psi\ ,\ \cos nz = -t_0\operatorname{sen}\psi\ ;$$

$$\frac{d}{dn} = \sqrt{1-t_0^2}\,e^{-l}\frac{\partial}{\partial t}\ ,$$

i valori di u, v, w, nell'interno del cono saranno dati dalle formole:

$$(10)\quad \begin{cases} u = \dfrac{1}{8\pi\mu}\displaystyle\int_\sigma \mathrm{L}\,\mathrm{G}_1\,d\sigma - \frac{\sqrt{1-t_0^2}}{8\pi}\int_\sigma \theta\,\mathrm{G}_1\,d\sigma - \\ \qquad - \dfrac{t_0}{4\pi}\displaystyle\int_\sigma (\varpi_3\cos\psi - \varpi_2\operatorname{sen}\psi)\,\mathrm{G}_1\,d\sigma - \frac{\lambda+\mu}{2\mu}\,x\theta - \\ \qquad\qquad - \dfrac{\lambda+\mu}{8\pi\mu}\,t_0\sqrt{1-t_0^2}\displaystyle\int_\sigma \frac{\partial\theta}{\partial t}\,\mathrm{G}_1\,d\sigma\ , \\ v = \dfrac{1}{8\pi\mu}\displaystyle\int_\sigma \mathrm{M}\,\mathrm{G}_1\,d\sigma + \frac{t_0}{8\pi}\int_\sigma \theta\cos\psi\,\mathrm{G}_1\,d\sigma - \\ \qquad - \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_\sigma (t_0\varpi_1\operatorname{sen}\psi + \varpi_3\sqrt{1-t_0^2})\,\mathrm{G}_1\,d\sigma - \frac{\lambda+\mu}{2\mu}\,y\theta - \\ \qquad\qquad - \dfrac{\lambda+\mu}{8\pi\mu}\,(1-t_0^2)\displaystyle\int_\sigma \frac{\partial\theta}{\partial t}\cos\psi\,\mathrm{G}_1\,d\sigma\ , \\ w = \dfrac{1}{8\pi\mu}\displaystyle\int_\sigma \mathrm{N}\,\mathrm{G}_1\,d\sigma + \frac{t_0}{8\pi}\int_\sigma \theta\operatorname{sen}\psi\,\mathrm{G}_1\,d\sigma + \\ \qquad + \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_\sigma (\varpi_2\sqrt{1-t_0^2} + t_0\varpi_1\cos\psi)\,\mathrm{G}_1\,d\sigma - \frac{\lambda+\mu}{2\mu}\,z\theta - \\ \qquad\qquad - \dfrac{\lambda+\mu}{8\pi\mu}\,(1-t_0^2)\displaystyle\int_\sigma \frac{\partial\theta}{\partial t}\operatorname{sen}\psi\,\mathrm{G}_1\,d\sigma\ , \end{cases}$$

dove L, M, N sono le date tensioni e G_1 la funzione di Neumann. Le (10)

non sono altro che le formole fondamentali (8) della prima Memoria: *Saggio di una teoria generale* ecc. (1), in cui sono state introdotte le nostre ipotesi particolari. Possiamo ora sempre porre:

$$(11)\quad \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \mathrm{LG}_1\, d\sigma = -\frac{e^{-\frac{l}{2}}}{2\pi\sqrt{1-t_0^2}}\sum_0^\infty{}^m \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{K}_m(t\,,\,i)}{\frac{\partial}{\partial t_0}\mathrm{K}_m(t_0\,,\,i)}\, di \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{+\infty} [\mathrm{L}(\varrho)\cos m\psi + \overline{\mathrm{L}}(\varrho)\,\mathrm{sen}\, m\psi]\cos i(l-\varrho)\, d\varrho$$

e due formole analoghe per $\frac{1}{4\pi}\int_\sigma \mathrm{MG}_1\, d\sigma$, $\frac{1}{4\pi}\int_\sigma \mathrm{NG}_1\, d\sigma$ le quali si ottengano dalla precedente ponendo $\mathrm{M}(\varrho)$, $\overline{\mathrm{M}}(\varrho)$; $\mathrm{N}(\varrho)$, $\overline{\mathrm{N}}(\varrho)$ rispettivamente per $\mathrm{L}(\varrho)$, $\overline{\mathrm{L}}(\varrho)$. Partendo ora dai valori (4) e (9) di θ ; ϖ_1 , ϖ_2 , ϖ_3 in superficie, è facile costruire tutti i termini che compaiono nelle (10) e la soluzione completa del problema è ridotta alla determinazione delle funzioni incognite θ_m , $\overline{\theta}_m$; $\varpi_{i,m}$, $\overline{\varpi}_{i,m}$ dalle equazioni:

$$(12)\quad \begin{cases} \theta = \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z}\,; \\ 2\varpi_1 = \dfrac{\partial w}{\partial y} - \dfrac{\partial v}{\partial z}\,,\quad 2\varpi_2 = \dfrac{\partial u}{\partial z} - \dfrac{\partial w}{\partial x}\,,\quad 2\varpi_3 = \dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y}\,. \end{cases}$$

L'esposizione completa di tutti i calcoli richiederebbe più spazio di quello che ci sia consentito; perciò noi ci limiteremo ad accennare il procedimento rimandando per maggiori schiarimenti alla Nota sul cilindro, più volte citata. Il modo che parmi il più semplice per completare la soluzione, consiste nel tener conto anche delle equazioni:

$$(13)\quad (\lambda + 2\mu)\frac{\partial\theta}{\partial x} + 2\mu\left(\frac{\partial\varpi_2}{\partial z} - \frac{\partial\varpi_3}{\partial y}\right) = 0$$

e delle due analoghe. Per mezzo di questa equazione scritta e delle ultime due delle (12) si riesce ad eliminare dalla prima delle (12) le rotazioni ed allora quest'ultima equazione determina le θ_m , $\overline{\theta}_m$. Per mezzo delle due equazioni analoghe alla (13) si possono eliminare dalla seconda delle (12) ϖ_2 e ϖ_3 ed allora quest'ultima equazione è capace di determinare $\varpi_{1,m}$, $\overline{\varpi}_{1,m}$. Finalmente le altre funzioni incognite $\varpi_{2,m}$, $\overline{\varpi}_{2,m}$; $\varpi_{3,m}$, $\overline{\varpi}_{3,m}$ si possono determinare dalle due equazioni analoghe alla (13) di cui abbiamo già parlato.

(1) Ann. di Matem., t. VIII della ser. III, pag. 129.

Fisica matematica. — *Campo elettromagnetico dovuto ad una corrente costante, elicoidale.* Nota di G. Picciati, presentata dal Socio V. Volterra.

Nei trattati di Fisica si studia, per l'importanza che ha nelle applicazioni, il campo dovuto ad una corrente che circola in un filo avvolto ad elica sopra un cilindro (rocchetto) in modo che le spire siano equidistanti e tali che la distanza fra due di esse sia infinitesima rispetto al raggio. Se il rocchetto ha una lunghezza teoricamente infinita, praticamente assai grande rispetto al raggio, si determinano le proprietà del campo magnetico dovuto ad una corrente costante [1] valendosi delle proprietà del campo dovuto ad una corrente circolare, e del principio dell'equivalenza fra una corrente in un circuito chiuso ed una lamina magnetica avente lo stesso perimetro. Lo studio così fatto del campo prodotto da una corrente elicoidale, limitato inoltre al caso in cui il passo è infinitesimo, è tutt'altro che completo ed esauriente: si può invece effettuare in modo completo e qualunque sia il passo dell'elica: l'esposizione dei resultati ottenuti forma oggetto della presente Nota. Si assegnano in generale le componenti della forza elettrica e magnetica per i punti interni ed esterni al cilindro su cui è tracciata l'elica; quando si consideri il passo infinitesimo rispetto al raggio del cilindro si ritrovano per il campo magnetico le proprietà note. Particolari proprietà presenta il campo, qualunque sia il passo, per i punti dell'asse o ad esso vicinissimi: le due forze, elettrica e magnetica, sono fra loro ortogonali, quella elettrica è diretta secondo la normale all'elica, quella magnetica ha inclinazione costante sull'asse.

1. Si consideri un dielettrico indefinito, isotropo, impolarizzabile ed in quiete, in cui sia immerso un conduttore filiforme indefinito disposto ad elica di parametro $m > 0$. Si supponga l'elica percorsa da una corrente di intensità costante; se si indicano con F, U, V, W i potenziali elettrostatico e vettore relativi a questa corrente (indipendenti dal tempo), è noto [2] che le componenti della forza elettrica (X, Y, Z) e magnetica (L, M, N) secondo

[1] V. per es. Ròiti, *Elementi di Fisica*, vol. II; o, per maggior dettaglio, il *Cours d'Électricité* par H. Pellat, T. II, Paris, 1903.

[2] Vedi T. Levi-Civita, *Sur le champ électromagnétique* ecc., Annales de la Faculté des sciences de Toulouse, ser. III, t. IV, 1902.

tre assi ortogonali, orientati nel modo solito, sono:

$$(1) \qquad X = -\frac{dF}{dx}\ ,\ Y = -\frac{dF}{dy}\ ,\ Z = -\frac{dF}{dz}\ ,$$

$$(2) \qquad \begin{cases} L = \dfrac{dV}{dz} - \dfrac{dW}{dy}\ , \\ M = \dfrac{dW}{dx} - \dfrac{dU}{dz}\ , \\ N = \dfrac{dU}{dy} - \dfrac{dV}{dx}\ . \end{cases}$$

L'equazione a cui i potenziali F , U , V , W debbono soddisfare si riduce a $\Delta_2 = 0$, e per il principio della conservazione dell'elettricità deve inoltre sussistere fra loro la relazione

$$(3) \qquad \frac{dU}{dx} + \frac{dV}{dy} + \frac{dW}{dz} = 0\ .$$

Riferiamoci a coordinate elicoidali legate alle cartesiane dalle relazioni

$$(4) \qquad x = \varrho_1 \cos\varrho_3\ ,\ y = \varrho_1 \operatorname{sen}\varrho_3\ ,\ z = \varrho_2 + m\varrho_3\ ,\ (m > 0)$$

e corrisponda l'elica data ai valori $\varrho_1' = R$, $\varrho_2' = 0$; supponendo in essa la corrente diretta in modo da formare un angolo acuto con la direzione positiva dell'asse z. Se I è la misura della intensità di corrente in unità elettromagnetiche, le componenti u , v , w dell' intensità, in unità elettrostatiche, secondo x , y , z, sono

$$Au = -\frac{RI}{\sqrt{R^2 + m^2}} \operatorname{sen}\varrho_3'\ ,\ Av = \frac{RI}{\sqrt{R^2 + m^2}} \cos\varrho_3'\ ,\ Aw = \frac{mI}{\sqrt{R^2 + m^2}}\ ;$$

quindi, essendo inoltre la densità (lineare) della distribuzione elettrica nei punti del filo data da $e = I$, avremo che i potenziali relativi alla corrente, che per un momento immaginiamo limitata al tratto d'elica compreso fra i valori $\varrho_3' = -\theta_1$, $\varrho_3' = \theta_2$, sono:

$$(5) \qquad F = I\sqrt{R^2 + m^2} \int_{-\theta_1}^{\theta_2} \frac{d\varrho_3'}{r} + \frac{E_1}{r_1} + \frac{E_2}{r_2}\ ,$$

$$(6) \qquad \begin{cases} U = \displaystyle\int_{-\theta_1}^{\theta_2} \frac{Au\sqrt{R^2 + m^2}}{r}\, d\varrho_3' = -RI \int_{-\theta_1}^{\theta_2} \frac{\operatorname{sen}\varrho_3'}{r}\, d\varrho_3'\ , \\ V = \displaystyle\int_{-\theta_1}^{\theta_2} \frac{Av\sqrt{R^2 + m^2}}{r}\, d\varrho_3' = \quad RI \int_{-\theta_1}^{\theta_2} \frac{\cos\varrho_3'}{r}\, d\varrho_3'\ , \\ W = \displaystyle\int_{-\theta_1}^{\theta_2} \frac{Aw\sqrt{R^2 + m^2}}{r}\, d\varrho_3' = \quad mI \int_{-\theta_1}^{\theta_2} \frac{d\varrho_3'}{r}\ , \end{cases}$$

essendo $r = \sqrt{R^2 + \varrho_1^2 - 2R\varrho_1 \cos(\varrho_3 - \varrho_3') + [\varrho_2 + m(\varrho_3 - \varrho_3')]^2}$ la distanza del punto potenziato P, di coordinate $(\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3)$, dal generico punto potenziante $(R, 0, \varrho_3')$ dell'elica; E_1, E_2 le cariche degli estremi del tratto considerato, r_1, r_2 le loro distanze da P. I coseni che le direzioni $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ formano con $x\ y\ z$ essendo $\cos\varrho_3, \operatorname{sen}\varrho_3, 0\ ;\ 0, 0, 1\ ;\ \frac{-\varrho_1 \operatorname{sen}\varrho_3}{\sqrt{\varrho_1^2 + m^2}}, \frac{\varrho_1 \cos\varrho_3}{\sqrt{\varrho_1^2 + m^2}}, \frac{m}{\sqrt{\varrho_1^2 + m^2}}$ se indichiamo le componenti del potenziale vettore secondo $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ con V_1, V_2, V_3, fra esse ed U V W avremo:

$$(7)\qquad \begin{cases} U = V_1 \cos\varrho_3 - \dfrac{\varrho_1 \operatorname{sen}\varrho_3}{\sqrt{\varrho_1^2 + m^2}} V_3\ , \\ V = V_1 \operatorname{sen}\varrho_3 + \dfrac{\varrho_1 \cos\varrho_3}{\sqrt{\varrho_1^2 + m^2}} V_3\ , \\ W = V_2 + \dfrac{m}{\sqrt{\varrho_1^2 + m^2}} V_3\ , \end{cases}$$

quindi per le (6) otteniamo

$$(8)\qquad \begin{cases} V_1 = IR \displaystyle\int_{-\theta_1}^{\theta_2} \frac{\operatorname{sen}(\varrho_3 - \varrho_3')}{r}\, d\varrho_3'\ , \\ V_2 = Im \displaystyle\int_{-\theta_1}^{\theta_2} \frac{d\varrho_3'}{r} - \frac{ImR}{\varrho_1} \int_{-\theta_1}^{\theta_2} \frac{\cos(\varrho_3 - \varrho_3')}{r}\, d\varrho_3'\ , \\ V_3 = \dfrac{IR\sqrt{\varrho_1^2 + m^2}}{\varrho_1} \displaystyle\int_{-\theta_1}^{\theta_2} \frac{\cos(\varrho_3 - \varrho_3')}{r}\, d\varrho_3'\ . \end{cases}$$

La determinazione di F, V_1, V_2, V_3 ci fa quindi conoscere per le precedenti e per le (1) e (2) il campo elettromagnetico prodotto dalla corrente. Si noti che l'equazioni in coordinate elicoidali a cui sono soggette F, V_1, V_2, V_3 si possono facilmente dedurre da quelle a cui sono soggette, in coordinate cartesiane, F, U, V, W.

2. Passiamo ora al caso limite di un'elica indefinita; per il potenziale elettrostatico F, che si riduce alla funzione potenziale di una massa ad una dimensione distribuita sopra l'elica, si ha [1] un'espressione in serie distinta in due tipi, valevoli uno per i punti interni al cilindro, l'altro per i punti esterni. Posto $\theta = \frac{\varrho_2}{m}$ si ha:

$$F = I\sqrt{R^2 + m^2}\ .\ \omega$$

[1] Vedi la mia Nota: *Sulle funzioni potenziali elicoidali.* Rendiconti della R. Acc. dei Lincei, vol. XIII, dicembre 1904.

essendo

$$(9)\quad \omega = -\frac{2}{m}\left\{\log \mathrm{R} - \pi \sum_{1}^{\infty n} i\, \mathrm{H}_1^n\left(\frac{in\mathrm{R}}{m}\right) \mathrm{J}^n\left(\frac{in\varrho_1}{m}\right) \cos n\theta\right\} \text{ per } \varrho_1 < \mathrm{R}$$

$$(10)\quad \omega = -\frac{2}{m}\left\{\log \varrho_1 - \pi \sum_{1}^{\infty n} i\, \mathrm{H}_1^n\left(\frac{in\varrho_1}{m}\right) \mathrm{J}^n\left(\frac{in\mathrm{R}}{m}\right) \cos n\theta\right\} \text{ per } \varrho_1 > \mathrm{R}$$

indicando J^n la funzione cilindrica di 1ª specie ed H_1^n la funzione cilindrica di Hankel.

Per le componenti del potenziale vettore date dalle (8) non è possibile senz'altro il passaggio al caso limite se prima non ci si assicura che gli integrali $\int \frac{\operatorname{sen}(\varrho_3 - \varrho_3')}{r}\, d\varrho_3'$, $\int \frac{\cos(\varrho_3 - \varrho_3')}{r}\, d\varrho_3'$ hanno un senso anche quando si estendono fra limiti infiniti; ciò che si verifica facilmente.

Si considerino infatti i due integrali

$$(11)\quad \begin{cases} \omega_1 = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(\varrho_3 - \varrho_3')}{\sqrt{\mathrm{R}^2 + \varrho_1^2 - 2\mathrm{R}\varrho_1 \cos(\varrho_3 - \varrho_3') + [\varrho_2 + m(\varrho_3 - \varrho_3')]^2}}\, d\varrho_3' \\ \omega_3 = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(\varrho_3 - \varrho_3')}{\sqrt{\mathrm{R}^2 + \varrho_1^2 - 2\mathrm{R}\varrho_1 \cos(\varrho_3 - \varrho_3') + [\varrho_2 + m(\varrho_3 - \varrho_3')]^2}}\, d\varrho_3' \end{cases}$$

e si ponga $\varrho_2 + m(\varrho_3 - \varrho_3') = m\lambda$, $\frac{\varrho_2}{m} = \theta$: avremo:

$$(12)\quad \begin{cases} \omega_1 = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(\lambda - \theta)\, d\lambda}{\sqrt{\mathrm{R}^2 + \varrho_1^2 - 2\mathrm{R}\varrho_1 \cos(\lambda - \theta) + m^2\lambda^2}} - \\ \qquad - \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(\lambda + \theta)\, d\lambda}{\sqrt{\mathrm{R}^2 + \varrho_1^2 - 2\mathrm{R}\varrho_1 \cos(\lambda + \theta) + m^2\lambda^2}} \\ \omega_3 = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos(\lambda - \theta)\, d\lambda}{\sqrt{\mathrm{R}^2 + \varrho_1^2 - 2\mathrm{R}\varrho_1 \cos(\lambda - \theta) + m^2\lambda^2}} + \\ \qquad + \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos(\lambda + \theta)\, d\lambda}{\sqrt{\mathrm{R}^2 + \varrho_1^2 - 2\mathrm{R}\varrho_1 \cos(\lambda + \theta) + m^2\lambda^2}} \end{cases}$$

Si ricordi ora la proprietà seguente sostanzialmente nota: « Se $f(x)$ è una funzione positiva, costantemente crescente fra un certo valore di x e ∞, le funzioni $\frac{\operatorname{sen} x}{f(x)}$, $\frac{\cos x}{f(x)}$ sono integrabili sino all'infinito ». Essendo quindi

$$\sqrt{\mathrm{R}^2 + \varrho_1^2 - 2\mathrm{R}\varrho_1 \cos(\lambda - \theta) + m^2\lambda^2} \text{ e } \sqrt{\mathrm{R}^2 + \varrho_1^2 - 2\mathrm{R}\varrho_1 \cos(\lambda + \theta) + m^2\lambda^2},$$

da un certo valore di λ in poi, funzioni di λ costantemente crescenti, si conclude che gli integrali che compariscono in ω_1 ed ω_3 hanno un senso ben determinato, riducendosi ω_1 ed ω_3 a due funzioni di ϱ_1 e θ. Per le espres-

sioni (12) di ω_1 ed ω_3 si riconosce inoltre che esse sono funzioni regolari per $\varrho_1 \leqq R$ e periodiche in θ; essendo inoltre ω_1 funzione dispari di θ, mentre ω_3 è pari, si deve poter sviluppare ω_1 in serie di seni, ed ω_3 in serie di coseni.

Per questo si osservi che, posto $\tau = R^2 + \varrho_1^2 + m^2\lambda^2$, si ha per $\varrho_1 \leqq R$, qualunque sia θ variabile fra 0 e 2π, lo sviluppo:

$$\operatorname{sen}(\lambda-\theta)\left[\tau - 2R\varrho_1\cos(\lambda-\theta)\right]^{-\frac{1}{2}} - \operatorname{sen}(\lambda+\theta)\left[\tau - 2R\varrho_1\cos(\lambda+\theta)\right]^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= \sum_0^\infty{}_n \binom{-\frac{1}{2}}{n} (-1)^n (R\varrho_1)^n \tau^{-\frac{1}{2}-n} \cdot \sum_{s=0}^{s=n} \binom{n}{s} \times$$

$$\times \left[\operatorname{sen}(\lambda-\theta)\cdot\cos(n-2s)(\lambda-\theta) - \operatorname{sen}(\lambda+\theta)\cos(n-2s)(\lambda+\theta)\right]$$

$$= 2\sum_{n=1}^{\infty}(A_{n+2} - A_n)\cos n\lambda \cdot \operatorname{sen} n\theta$$

avendo posto

$$(13)\quad A_n = \sum_{r=0}^{\infty}\binom{n-1+2r}{r}\binom{-\frac{1}{2}}{n-1+2r}(-1)^{n-1+2r}(R\varrho_1)^{n-1+2r}\tau^{-\frac{1}{2}-(n-1)-2r}.$$

Analogamente si trova

$$\cos(\lambda-\theta)\left[\tau - 2R\varrho_1\cos(\lambda-\theta)\right]^{-\frac{1}{2}} + \cos(\lambda+\theta)\left[\tau - 2R\varrho_1\cos(\lambda+\theta)\right]^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= 2A_2 + 2\sum_{n=1}^{\infty}(A_{n+2} + A_n)\cos n\lambda \cdot \cos n\theta .$$

Si ricordi ora che per una notevole formola di Sonin [1] si ha

$$\int_0^\infty \frac{J^\nu(xt)\,t^{\nu+1}}{(t^2+y^2)\,\varrho^{+1}}\,dt = \frac{\pi i\, x^\varrho (iy)^{\nu-\varrho}}{2^{\varrho+1}\,\Gamma(1+\varrho)}\,H_1^{\nu-\varrho}(xyi),$$

quindi anche

$$\int_0^\infty \frac{\cos n\lambda \cdot d\lambda}{\tau^{n+2r-\frac{1}{2}}} = \int_0^\infty \frac{\sqrt{\frac{\pi n\lambda}{2}}\,J^{-\frac{1}{2}}(n\lambda)\,d\lambda}{(m^2\lambda^2 + R^2 + \varrho_1^2)^{n+2r-\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{\pi n}{2}}\cdot m^{1-2n-4r}\,\pi i (n)^{n+2r-\frac{3}{2}}\left(\frac{i\sqrt{R^2+\varrho_1^2}}{m}\right)^{-n-2r+1}}{2^{n+2r-\frac{1}{2}}\,\Gamma(n+2r-\frac{1}{2})}\,H_1^{-n-2r+1}\left(\frac{in\sqrt{R^2+\varrho_1^2}}{m}\right);$$

[1] Nielsen, *Handbuch der Theorie der Cylinderfunctionen*, Leipzig, 1904, pag. 221.

perciò otteniamo

$$(14)\quad \begin{cases} B_n = \int_0^\infty A_n \cos n\lambda \, . \, d\lambda = \\ = \dfrac{\pi i}{2m} \sum_{r=0}^{\infty} \dfrac{1}{(r)!\,(n-1+r)!} \left(\dfrac{in R\varrho_1}{2m\sqrt{R^2+\varrho_1^2}} \right)^{n-1+2r} H_1^{n-1+2r} \left(\dfrac{in\sqrt{R^2+\varrho_1^2}}{m} \right) \\ B_{n+2} = \int_0^\infty A_{n+2} \cos n\lambda \, . \, d\lambda = \\ = \dfrac{\pi i}{2m} \sum_{r=0}^{\infty} \dfrac{1}{(r)!\,(n+1+r)!} \left(\dfrac{in R\varrho_1}{2m\sqrt{R^2+\varrho_1^2}} \right)^{n+1+2r} H_1^{n+1+2r} \left(\dfrac{in\sqrt{R^2+\varrho_1^2}}{m} \right) . \end{cases}$$

Dalle (12) abbiamo perciò

$$(15)\quad \begin{cases} \omega_1 = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (B_{n+2} - B_n) \operatorname{sen} n\theta \\ \omega_3 = 2 \int_0^\infty A_2 \, d\lambda + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (B_{n+2} + B_n) \cos n\theta . \end{cases}$$

Per poter dare alle espressioni di ω_1 ed ω_3 una forma più semplice ed elegante, ricorriamo ora alle equazioni a cui esse debbono soddisfare.

3. Si ricordi che F , U , V , W debbono soddisfare, in coordinate $x\,y\,z$, all'equazioni

$$\Delta_2 F = 0 \ , \ \Delta_2 U = 0 \ , \ \Delta_2 V = 0 \ , \ \Delta_2 W = 0 \ , \ \frac{dU}{dx} + \frac{dV}{dy} + \frac{dW}{dz} = 0$$

e che fra esse e le V_1 , V_2 , V_3 sussistono le relazioni (7). Inoltre per le (8), (9), (11) si ha

$$(16)\quad F = I\sqrt{R^2+m^2} \, . \, \omega \ , \ V_1 = IR\omega_1 \ , \ V_2 = Im\left(\omega - \frac{R}{\varrho_1} \omega_3 \right) ,$$

$$V_3 = \frac{IR\sqrt{\varrho_1^2+m^2}}{\varrho_1} \omega_3$$

con $\omega , \omega_1 , \omega_3$ funzioni delle sole ϱ_1 , θ; quindi essendo, per le (4), in coordinate elicoidali

$$\Delta_2 = \frac{d^2}{d\varrho_1^2} + \frac{1}{\varrho_1}\frac{d}{d\varrho_1} + \left(1 + \frac{m^2}{\varrho_1^2}\right)\frac{1}{m^2}\frac{d^2}{d\theta^2} - \frac{2}{\varrho_1^2}\frac{d^2}{d\theta\, d\varrho_3} + \frac{1}{\varrho_1^2}\frac{d^2}{d\varrho_3^2} ,$$

si ottengono per ω_1 , ω_3, posto

$$\Delta_2' = \frac{d^2}{d\varrho_1^2} + \frac{1}{\varrho_1}\frac{d}{d\varrho_1} + \left(1 + \frac{m^2}{\varrho_1^2}\right)\frac{1}{m^2}\frac{d^2}{d\theta^2} ,$$

e tenendo conto che $\Delta_2' \omega = 0$, le seguenti equazioni

$$(17)\qquad \begin{cases} \Delta_2' \omega_1 = \dfrac{\omega_1}{\varrho_1^2} - \dfrac{2}{\varrho_1^2}\dfrac{d\omega_3}{d\theta}\,, \\ \Delta_2' \omega_3 = \dfrac{\omega_3}{\varrho_1^2} + \dfrac{2}{\varrho_1^2}\dfrac{d\omega_1}{d\theta}\,, \end{cases}$$

$$(18)\qquad \frac{d\omega_1}{d\varrho_1} + \frac{\omega_1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho_1}\frac{d\omega_3}{d\theta} + \frac{1}{\mathrm{R}}\frac{d\omega}{d\theta} = 0\,.$$

Dalle prime due si ricava per $\Omega = \omega_3 + i\omega_1$ l'equazione

$$(19)\qquad \Delta_2' \Omega = \frac{\Omega}{\varrho_1^2} - i\frac{2}{\varrho_1^2}\frac{d\Omega}{d\theta}\,,$$

onde, posto

$$\Omega = c_0 + i\,c_0' + \sum_1^\infty [c_n\, e^{in\theta} + c_n'\, e^{-in\theta}]$$

con $c_n\,,\ c_n'$ funzioni di ϱ_1, si ha dalla (19)

$$\frac{d^2 c_0}{d\varrho_1^2} + \frac{1}{\varrho_1}\frac{dc_0}{d\varrho_1} = \frac{c_0}{\varrho_1^2}\,;$$

$$\frac{d^2 c_n}{d\varrho_1^2} + \frac{1}{\varrho_1}\frac{dc_n}{d\varrho_1} - \left(1 + \frac{m^2}{\varrho_1^2}\right)\frac{n^2}{m^2}\,c_n = \frac{c_n}{\varrho_1^2}\,(1 + 2n)\,;$$

ed analogamente per $c_0'\,,\ c_n'$. Si trae intanto

$$c_0 = a_0\,\varrho_1 + \frac{b_0}{\varrho_1} \quad,\quad c_0' = a_0'\,\varrho_1 + \frac{b_0'}{\varrho_1}$$

con $a_0\,,\ a_0'\,,\ b_0\,,\ b_0'$ costanti: inoltre, posto $\xi = \dfrac{in\varrho_1}{m}$, si ha

$$\frac{d^2 c_n}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi}\frac{dc_n}{d\xi} + \left[1 - \frac{(n+1)^2}{\xi^2}\right] c_n = 0$$

quindi per $c_n\,,\ c_n'$ otteniamo

$$c_n = a_n\,\mathrm{J}^{n+1}\left(\frac{in\varrho_1}{m}\right) + b_n\,\mathrm{Y}^{n+1}\left(\frac{in\varrho_1}{m}\right)\ ;\ c_n' = a_n'\,\mathrm{J}^{n-1}\left(\frac{in\varrho_1}{m}\right) + b_n'\,\mathrm{Y}^{n-1}\left(\frac{in\varrho_1}{m}\right),$$

con $a_n\,,\ b_n\,,\ a_n'\,,\ b_n'$ costanti. Le espressioni di ω_1 ed ω_3 assumono quindi. per la posizione fatta, la forma

$$(20)\qquad \begin{cases} \omega_3 = a_0\,\varrho_1 + \dfrac{b_0}{\varrho_1} + \sum\limits_1 (a_n\,\mathrm{J}^{n+1} + b_n\,\mathrm{Y}^{n+1} + a_n'\,\mathrm{J}^{n-1} + b_n'\,\mathrm{Y}^{n-1})\cos n\theta\,, \\ \omega_1 = a_0'\,\varrho_1 + \dfrac{b_0'}{\varrho_1} + \sum\limits_1^\infty (a_n\,\mathrm{J}^{n+1} + b_n\,\mathrm{Y}^{n+1} - a_n'\,\mathrm{J}^{n-1} - b_n'\,\mathrm{Y}^{n-1})\,\mathrm{sen}\,n\theta\,, \end{cases}$$

l'argomento delle funzioni cilindriche essendo $\frac{in\varrho_1}{m}$; restano però da determinare i coefficienti costanti che in esse compariscono.

Questo è reso assai facile per il confronto fra le espressioni (20) e le (15); è necessario però distinguere i due casi in cui è $\varrho_1 < R$ o $\varrho_1 > R$. Sia dapprima $\varrho_1 < R$; restando ω_1, ω_3 regolari insieme alle loro derivate anche per $\varrho_1 = 0$ dovremo nelle (20) fare $b_0 = b'_0 = b_n = b'_n = 0$, onde escludere la singolarità in $\varrho_1 = 0$. Il confronto fra le (20) e le (15) dà allora

$$a'_0 = 0 \quad , \quad a_0 \varrho_1 = 2 \int_0^\infty A_2 \, d\lambda ,$$

$$a_n J^{n+1}\left(\frac{in\varrho_1}{m}\right) = 2B_{n+2} \quad ; \quad a'_n J^{n-1}\left(\frac{in\varrho_1}{m}\right) = 2B_n .$$

Per l'espressione di A_2 che si ha dalla (13) resulta intanto $a_0 = \frac{1}{Rm}$; si ha inoltre

$$a_n \cdot \left[\frac{J^{n+1}\left(\frac{in\varrho_1}{m}\right)}{\varrho_1^{n+1}} \right]_{\varrho_1=0} = 2 \left[\frac{B_{n+2}}{\varrho_1^{n+1}} \right]_{\varrho_1=0}$$

ossia

$$a_n \frac{1}{(n+1)!} \left(\frac{in}{2m}\right)^{n+1} = \frac{\pi i}{m} \frac{1}{(n+1)!} \left(\frac{in}{2m}\right)^{n+1} H_1^{n+1}\left(\frac{inR}{m}\right),$$

quindi, avendosi una formula analoga per a'_n, si ha

$$a_n = \frac{\pi i}{m} H_1^{n+1}\left(\frac{inR}{m}\right) \quad ; \quad a'_n = \frac{\pi i}{m} H_1^{n-1}\left(\frac{inR}{m}\right).$$

Le espressioni di ω_1, ω_2 sono quindi:

$$(21) \quad \begin{cases} \omega_1 = \frac{\pi i}{m} \sum_1^\infty{}_n \left[H_1^{n+1}\left(\frac{inR}{m}\right) J^{n+1}\left(\frac{in\varrho_1}{m}\right) - \right. \\ \qquad \left. - H_1^{n-1}\left(\frac{inR}{m}\right) J^{n-1}\left(\frac{in\varrho_1}{m}\right) \right] \operatorname{sen} n\theta \\ \omega_3 = \frac{\varrho_1}{Rm} + \frac{\pi i}{m} \sum_1^\infty{}_n \left[H_1^{n+1}\left(\frac{inR}{m}\right) J^{n+1}\left(\frac{in\varrho_1}{m}\right) + \right. \\ \qquad \left. + H_1^{n-1}\left(\frac{inR}{m}\right) J^{n-1}\left(\frac{in\varrho_1}{m}\right) \right] \cos n\theta \end{cases} \quad \text{per } \varrho_1 < R$$

Supponiamo ora $\varrho_1 > R$: fissato ϱ_1 supponiamo R variabile; data la simmetria di ω_1, ω_3 in R e ϱ_1 esse dovranno essere in R, per $R < \varrho_1$, dello

stesso tipo che in ϱ_1, per $\varrho_1 < R$, ed inoltre regolari per $R = 0$; onde si ha

$$(22)\quad \begin{cases} \omega_1 = \dfrac{\pi i}{m} \sum_1^{\infty n} \left[H_1^{n+1}\left(\dfrac{in\varrho_1}{m}\right) J^{n+1}\left(\dfrac{inR}{m}\right) - \right. \\ \qquad\qquad \left. - H_1^{n-1}\left(\dfrac{in\varrho_1}{m}\right) J^{n-1}\left(\dfrac{inR}{m}\right) \right] \operatorname{sen} n\theta \\ \omega_3 = \dfrac{R}{\varrho_1 m} + \dfrac{\pi i}{m} \sum_1^{\infty n} \left[H_1^{n+1}\left(\dfrac{in\varrho_1}{m}\right) J^{n+1}\left(\dfrac{inR}{m}\right) + \right. \\ \qquad\qquad \left. + H_1^{n-1}\left(\dfrac{in\varrho_1}{m}\right) J^{n-1}\left(\dfrac{inR}{m}\right) \right] \cos n\theta \end{cases} \quad \text{per } \varrho_1 > R$$

Si osservi che in ambedue i casi le espressioni così determinate di $\omega, \omega_1, \omega_3$ verificano la (18).

Riepilogando: le (16) ci fanno conoscere i potenziali del campo dovuto alla corrente sia per $\varrho_1 < R$ mediante le (9) (21), sia per $\varrho_1 > R$ mediante le (10) (22).

Per $R = 0$ otteniamo in quest'ultimo caso i noti potenziali di una corrente costante rettilinea indefinita. Si hanno ora tutti gli elementi per procedere all'esame del campo prodotto dalla corrente; a questo si prestano meglio le componenti delle forze elettromagnetiche secondo x, y, z.

Le espressioni di queste componenti X, Y, Z, L, M, N si ottengono facilmente dalle (1) (2) tenendo conto delle formole di trasformazione (4) e delle (7), (16): in esse compariscono le $\omega, \omega_1, \omega_3$. La sostituzione ad $\omega, \omega_1, \omega_3$ dei corrispondenti valori (9) e (21) per $\varrho_1 < R$ oppure (10) e (22) per $\varrho_1 > R$ dà i valori cercati delle forze elettromagnetiche per i punti interni od esterni al cilindro su cui è tracciata l'elica.

Non potendo dilungarmi [1], mi limito solo ad osservare che per i punti dell'asse o ad esso vicinissimi, cioè per $\varrho_1 = 0$ od infinitesimo, il campo presenta la particolarità accennata nella prefazione. Così se si considera il caso in cui il passo $2\pi m$ sia infinitesimo rispetto a $2\pi R$, in modo da essere $\dfrac{m}{R}$ trascurabile, essendo però nel tempo stesso una quantità finita $\dfrac{I}{m} = 2\pi I \dfrac{1}{2\pi m} = 2\pi I\mu$, indicando μ il numero delle spire per unità di lunghezza, si ritrovano, valendosi degli sviluppi assintotici delle funzioni cilindriche [2] per valori grandissimi dell'argomento, le note proprietà dei rocchetti [3]: cioè per i punti interni il campo magnetico è uniforme, parallelo all'asse del cilindro, alla sinistra dell'osservatore di Ampère rivolto verso l'asse, e di intensità $4\pi I\mu$; all'esterno è nullo.

[1] Mi propongo di esporre in seguito nei loro particolari le proprietà del campo di un solenoide.

[2] Nielsen, l. c., pag. 156.

[3] Pellat, l. c., pag. 64 e seg.

Fisica matematica. — *Sulla teoria del solenoide elettrodinamico.* Nota del prof. Giuseppe Picciati, presentata dal Socio Vito Volterra.

Fisiopatologia. — *Sull'evoluzione della sensibilità nelle cicatrici, nelle plastiche e negli innesti.* Nota di Guido Lerda, presentata dal Socio A. Mosso.

Le Note precedenti saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

Fisica. — *Sull'osservazione spettroscopica della luce di intensità periodicamente variabile.* Nota del dott. O. M. Corbino, presentata dal Corrispondente D. Macaluso.

1. Facendo subire a un fascio di luce, primitivamente omogenea, alterazioni periodiche molto rapide nell'intensità, si debbono produrre dei cambiamenti nello spettro della luce medesima. La previsione di tali cambiamenti conduce però ad alcune difficoltà quando si voglia tener conto delle proprietà reali dello spettroscopio, oltre che della sua funzione teorica, di scomporre, cioè, in componenti sinusoidali di Fourier lo stato vibratorio che si ha sulla fenditura.

Mi propongo in questa Nota di esaminare il problema e di discutere le condizioni sperimentali che permetterebbero di ritrovare gli interessanti fenomeni previsti.

2. Una vibrazione luminosa primitivamente sinusoidale, cui si faccia subire una variazione periodica nell'ampiezza si può porre, nel caso più generale, sotto la forma

$$s = \varphi(t) \operatorname{sen} \omega t \tag{1}$$

indicando con $\varphi(t)$ una funzione periodica di cui sia $T' = \frac{2\pi}{\omega'}$ il periodo. La (1) è rappresentabile graficamente con una sinusoide ad ampiezza *lentamente* variabile, in tutti i casi in cui $\varphi(t)$ varia pochissimo durante il periodo $T = \frac{2\pi}{\omega}$ di $\operatorname{sen} \omega t$; ciò avviene sempre per i fenomeni luminosi.

Scomponendo $\varphi(t)$ in serie di Fourier, ponendo cioè

$$\varphi(t) = \Sigma_m a_m \cos(m\omega' t + \alpha_m)$$

si avrà

$$s = \Sigma_m a_m \cos(m\omega' t + \alpha_m) \operatorname{sen} \omega t$$

di cui il termine generale è equivalente a

$$(2) \qquad a_m \{\operatorname{sen}[(\omega + m\omega')\, t + \alpha_m] + \operatorname{sen}[(\omega - m\omega')\, t - \alpha_m]\}$$

cioè a due vibrazioni persistenti di pulsazioni $\omega + m\omega'$, $\omega - m\omega'$, cui corrispondono due righe simmetricamente poste rispetto alla riga della luce primitiva e a distanze da questa proporzionali a $m\omega'$. Ai varî armonici di $\varphi(t)$ corrisponderanno quindi delle coppie di righe simmetriche rispetto alla primitiva, di intensità proporzionale a quella dell'armonico relativo nella funzione $\varphi(t)$, risultandone da entrambe le parti, uno spettro discontinuo a righe fisse equidistanti.

3. Tutto ciò presuppone però nell'apparato spettroscopico un potere separatore infinito (che cioè in ogni punto dello spettro si abbia soltanto luce sinusoidale di un periodo unico), o per lo meno un potere separatore tale che le diverse righe calcolate siano separate completamente.

Ben diverse possono essere le condizioni degli spettroscopi ordinari, cui corrispondono, per una determinata luce sinusoidale incidente, luci disperse in tutti gli azimut, con ampiezze presentanti dei massimi più o meno netti, a seconda del potere separatore dello spettroscopio medesimo.

In ogni punto dello spettro si sovrappongono con ciò luci di periodi notevolmente diversi, che si influenzano mutuamente; può quindi avvenire che per forme particolari della funzione $\varphi(t)$, cui corrisponda una non completa separazione delle varie righe dianzi previste, si abbiano nello spettro apparenze del tutto diverse.

Conviene pertanto ricercare se non sia possibile un altro modo di scomposizione della vibrazione di ampiezza periodicamente variabile, che non sia quello fondato sull'uso della serie di Fourier ma che si adatti meglio alle proprietà reali dello spettroscopio, quando esso non sia sufficiente alla separazione completa degli armonici di questa serie.

Se si pone, nell'ipotesi $\varphi(t) < 1$,

$$(3) \quad s = \varphi(t) \operatorname{sen} \omega t = \operatorname{sen}[\omega t + \operatorname{arc\,cos}\, \varphi(t)] + \operatorname{sen}[\omega t - \operatorname{arc\,cos}\, \varphi(t)]$$

si può dimostrare che tale scomposizione, analiticamente legittima, identifica la luce di intensità variabile con un fenomeno di battimenti tra due luci aventi numeri di vibrazioni periodicamente variabili, e cui corrispondono, in certi casi, due righe oscillanti nello spettro.

Consideriamo infatti, la prima delle due vibrazioni componenti. Essa è rappresentata da una funzione la quale si annulla a intervalli successivi di tempo $\frac{T_1}{2}$ tali che vi corrisponda un accrescimento di π nell'argomento

$\omega t + \arccos \varphi(t)$; così se il seno si annulla successivamente per i due valori del tempo t e $t + \frac{T_1}{2}$ sarà

$$\omega t + \arccos \varphi(t) = p\pi \tag{4}$$

$$\omega\left(t + \frac{T_1}{2}\right) + \arccos \varphi\left(t + \frac{T_1}{2}\right) = (p+1)\,\pi \tag{5}$$

ove p denota un numero intero.

L'intervallo $\frac{T_1}{2}$ è molto prossimo a $\frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega}$ (semi-periodo di $\operatorname{sen} \omega t$) data la lenta variazione di $\varphi(t)$ col tempo in confronto della variazione di $\operatorname{sen} \omega t$. Si può quindi considerare come piccolissimo l'accrescimento di $\varphi(t)$, e quindi di $\arccos \varphi(t)$, nel tempo $\frac{T_1}{2}$, e calcolare questi accrescimenti con lo sviluppo in serie di Taylor limitato al secondo termine.

Si avrà con ciò:

$$\varphi\left(t + \frac{T_1}{2}\right) = \varphi(t) + \frac{T_1}{2}\,\varphi'(t)$$

e

$$\arccos \varphi\left(t + \frac{T_1}{2}\right) = \arccos\left[\varphi(t) + \frac{T_1}{2}\,\varphi'(t)\right]$$

$$= \arccos \varphi(t) + \frac{{}^1/_2\, T_1\, \varphi'(t)}{\sqrt{1 - \varphi^2(t)}}.$$

Sostituendo nella (5) e tenendo presente la (4) si ha quindi

$$\left[\omega - \frac{\varphi'(t)}{\sqrt{1 - \varphi^2(t)}}\right] \frac{T_1}{2} = \pi$$

la quale confrontata con

$$\omega\,\frac{T}{2} = \pi$$

ove T è il periodo di $\operatorname{sen} \omega t$, e tenuto presente che, nel problema di cui ci occupiamo, il secondo termine della parentesi è sempre molto piccolo di fronte al primo, diviene

$$T_1 = T\left[1 + \frac{1}{\omega}\,\frac{\varphi'(t)}{\sqrt{1 - \varphi^2(t)}}\right]. \tag{6}$$

L'intervallo T_1 è quindi funzione periodica del tempo, avente per periodo quello di $\varphi(t)$.

In modo analogo si trova per l'altra componente

$$T_1' = \left[1 - \frac{1}{\omega} \frac{\varphi'(t)}{\sqrt{1 - \varphi^2(t)}} \right]. \tag{7}$$

In un spettroscopio di potere separatore sufficientemente elevato, queste due luci di numeri di vibrazioni variabili dovrebbero dare uno spettro discontinuo con righe di intensità costante.

Ma può darsi, invece, che la $\varphi(t)$ abbia una forma tale da risultarne per le due componenti un periodo che cambia lentamente, pur avendosi una ampiezza di variazione notevole. In tal caso con uno spettroscopio ordinario, per l'azione mutua delle varie componenti che si sovrappongono in ogni punto dello spettro, la luce considerata darà anzichè uno spettro a molte righe *fisse*, un semplice *doublet* a componenti oscillanti.

Si immagini, per esempio, che sia

$$\varphi(t) = \operatorname{sen}[k \operatorname{sen} \omega' t] \tag{8}$$

con

$$k = 10^{10} \quad , \quad \omega' = 2\pi \times 10,$$

In questa ipotesi la φ ha per periodo $\frac{2\pi}{\omega}$, cioè 1/10 di minuto secondo, e quindi le varie componenti di Fourier della vibrazione

$$s = \varphi(t) \operatorname{sen} \omega t$$

in cui, per la luce del sodio, è

$$\omega = 2\pi \times 5 \times 10^{14}$$

e che avranno (v. § 2) le pulsazioni $\omega + m\omega'$, cioè

$$\omega + \omega' \, , \; \omega + 2\omega' \, , \; \omega + 3\omega' \, , \ldots$$

non possono venir separate da nessuno spettroscopio; nè è facile prevedere l'effetto della sovrapposizione delle componenti contigue.

Ricorriamo invece alla scomposizione data dalla (3). Le (6) e (7) divengono allora:

$$T_1 = T\left[1 + \frac{1}{\omega} k\omega' \cos \omega' t \right]$$

$$T_1' = T\left[1 - \frac{1}{\omega} k\omega' \cos \omega' t \right] \tag{9}$$

le quali ci dicono che la riga primitiva si scompone in un *doublet*, di cui ciascuna componente è una luce di periodo lentamente variabile, tale cioè

che il numero di vibrazioni in un decimo di secondo, subisce una variazione massima di $\frac{2}{\omega} k\omega' = \frac{2}{1000}$.

Or è evidente che ognuna delle componenti sarà una riga mobile nello spettro (1), e precisamente una riga che oscilla dieci volte in un secondo intorno alla riga normale, con un'ampiezza eguale circa al doppio della distanza tra le righe del sodio.

Può quindi avvenire che la $\varphi(t)$, pur essendo di periodo molto grande, determini delle modificazioni spettrali notevoli ben diverse da quelle che la semplice scomposizione di Fourier farebbe prevedere.

4. Si osservi che nell'esempio precedente l'ampiezza di oscillazione di una delle due righe mobili, cioè $\frac{2}{\omega} k\omega'$, dipende dal prodotto $k\omega'$; cosicchè facendo variare k e ω' in modo che il prodotto si mantenga costante, ma ω' vada sempre crescendo, le oscillazioni della riga, conservando la stessa ampiezza, si andran facendo sempre più rapide. Supponiamo di giungere, con ciò, a molto grandi valori di ω'; data la rapidità delle oscillazioni, la riga mobile si vedrà come una banda, e sembra che le apparenze debbano restare identiche anche se ω' è già divenuto tanto grande che, facendo la decomposizione con la serie di Fourier, le righe corrispondenti alle componenti dianzi calcolate siano completamente separate.

Per intendere come avvenga questa trasformazione di una banda generata da una riga mobile, in uno spettro a righe fisse, mentre ω' cresce in modo continuo, si pensi che anche per oscillazioni lente della riga, tali oscillazioni sono *un effetto apparente* dell'interferenza tra le varie componenti che si sovrappongono, almeno in parte, in ogni punto dello spettro; interferenza che genera lo annullamento della luce in tutti i posti, tranne uno, quello cioè per cui passa, in quell'istante, la riga mobile osservata. In altri termini la riga oscillante è una manifestazione dell'annullamento periodico e con diversa fase delle varie righe in parte sovrapposte.

Si intende quindi che tale manifestazione debba cessare quando le varie righe siano completamente separate.

5. La forma attribuita alla φ nella eguaglianza (8) e la costanza del prodotto $k\omega'$ non è d'altra parte una semplice astrazione analitica, ma corrisponde a un fenomeno che è possibile realizzare.

Una sorgente di luce monocromatica, capace di dar luogo al fenomeno Zeeman, si trovi in un campo magnetico di intensità variabile, come quello prodotto da una bobina percorsa da scariche oscillanti, e si consideri la luce emessa normalmente al campo, estinguendo con un nicol le vibrazioni parallele alle linee di forza.

(1) Basta pensare all'osservazione del fenomeno Zeeman dovuto a un campo lentamente variabile.

Per un campo costante si avrà allo spettroscopio un *doublet* le cui componenti si trovano a una distanza proporzionale all'intensità del campo. Per un campo variabile sinusoidalmente con pulsazione ω' i periodi delle componenti saranno espressi quindi da relazioni analoghe alle (9), e vi corrisponderanno due righe oscillanti con pulsazione ω'. Al crescere di ω', se il valore massimo del campo resta costante, le due righe tracceranno con velocità crescente una banda di ampiezza costante.

Tale banda, per ω' grandissimo, dovrebbe poi scindersi in un sistema di righe equidistanti. Si noti però che, nel caso attuale, non è possibile giungere a tale scomposizione; bisognerebbe infatti che l'apparato spettrale riuscisse a separare le righe corrispondenti alle pulsazioni

$$\omega + \omega' \quad , \quad \omega + 2\omega' \quad , \quad \omega + 3\omega',$$

Or anche ammesso che le qualità della luce normale emessa dalla sorgente e la potenza dell'apparato spettroscopico permettessero di scomporre due righe come quelle corrispondenti a

$$\omega \, , \omega + 10^{-6}\omega$$

si dovrebbe avere per ω'

$$\omega' = 10^{-6}\omega$$

cioè

$$\omega' = 2\pi \times 5 \times 10^{8}$$

con che la bobina dovrebbe essere traversata da onde elettriche della lunghezza di 50 centimetri, la qual cosa deve ritenersi come impossibile data l'induttanza della bobina.

6. Ritornando al caso delle luci intermittenti, si può riconoscere senza difficoltà che nessun mezzo meccanico di alterazione dell'intensità di un fascio di luce può essere così rapido da determinare modificazioni spettrali rivelabili agli spettroscopi di cui noi disponiamo. Un risultato migliore si otterrebbe profittando della istantaneità del fenomeno della birefrangenza elettrica, quale risulta dalle belle esperienze di Abraham e Lemoine e dalle altre posteriori di James (1); e che suggerisce un metodo molto comodo per avere fasci di luce rapidissimamente intermittenti.

Si sostituisca infatti, nel dispositivo di Abraham e Lemoine, alla luce della scintilla un fascio di luce ordinaria, si tolga il prisma birefrangente e si orienti il secondo nicol a 90° dal primo, cioè all'oscurità. Inoltre si faccia traversare il condensatore da oscillazioni elettriche di grande frequenza.

L'ampiezza della vibrazione luminosa emergente varierà come $\operatorname{sen} \pi \frac{\delta}{\lambda}$, ove λ indica la differenza di cammino tra il raggio ordinario e straordinario

(1 Ann. d. Phys. Bd. *15*, fasc. 15, 1904.

generata dal campo variabile. Se le oscillazioni elettriche sono della lunghezza d'onda di 1 metro, il che non sembra difficile a ottenere, il fascio emergente sarà interotto 600 milioni di volte a secondo, cosicchè nessun mezzo cinematico ne potrebbe rivelare la non continuità. La funzione $\varphi(t)$ avrebbe in tal caso come periodo $\frac{1}{6 \times 10^8}$ di secondo; e le componenti più interne dello sviluppo in serie di Fourier dato al § 2, disterebbero quindi tra loro di circa $\frac{2}{1000}$ della distanza tra le due righe del sodio.

Se il potere separatore dello spettroscopico è inferiore a questo limite, converrà ricorrere alla scomposizione discussa al § 3. Supponiamo che il campo H varî sinusoidalmente con periodo $\frac{2\pi}{\omega'}$, che sia cioè

$$H = H_0 \operatorname{sen} \omega' t .$$

La differenza di cammino, indicando con K una costante, è data allora da

$$\delta = K H_0^2 \operatorname{sen}^2 \omega' t$$

e la luce emergente si potrà rappresentare con

$$\operatorname{sen} \pi \frac{\delta}{\lambda} \operatorname{sen} \omega t = \operatorname{sen} [A \operatorname{sen}^2 \omega' t] \operatorname{sen} \omega t$$

ove si è posto

$$A = \frac{\pi K H_0^2}{\lambda} .$$

La (6) e la (7) divengono, data questa forma di $\varphi(t)$,

$$T_1 = T \left[1 + \frac{\omega'}{\omega} A \operatorname{sen} 2\omega' t \right]$$

$$T_1' = T \left[1 - \frac{\omega'}{\omega} A \operatorname{sen} 2\omega' t \right] .$$

Adunque la riga primitiva si trasformerà in un *doublet* di cui le componenti, mantenendosi simmetriche rispetto alla prima, oscillano pendolarmente intorno ad essa con periodo $\frac{\pi}{\omega'}$, e con ampiezza corrispondente ad $A \frac{\omega'}{\omega}$. Data la rapidità di queste oscillazioni l'occhio riceverà l'impressione di una banda avente la larghezza corrispondente a $2A \frac{\omega'}{\omega}$.

Nel caso di oscillazioni elettriche di un metro di lunghezza d'onda, e di un effetto Kerr di 0.12 λ, quale sarebbe prodotto da due armature lunghe 20 cm., distanti 1 mm. e con differenza di potenziale massima eguale a

4000 Volt, l'ampiezza della banda sarà quindi solo di appena mezzo millesimo della distanza tra le due righe del sodio.

7. Un maggior numero di intermittenze per secondo può essere ottenuto ricorrendo alla luce stessa delle scintille negli oscillatori elettromagnetici, poichè la scintilla, finchè le velocità raggiunte con gli specchi giranti, han permesso di risolverla, è costituita da un fenomeno luminoso discontinuo.

Molto interessante, dal punto di vista che ci occupa, è il lavoro del Décombe (1), che riuscì a fotografare scariche oscillanti del periodo 2×10^{-7}, discutendo con grande cura le condizioni necessarie perchè le singole scintilline siano quanto più numerose e brillanti è possibile.

Una differenza rilevante si ha tra le scintille scoccanti nell'aria e quelle scoccanti in un dielettrico quale l'olio di vasellina suggerito dal Righi.

Nel secondo caso la scintilla, decomposta dallo specchio girante, oltre che più luminosa, è costituita da tratti rettilinei che in tutta la loro lunghezza seguono, col loro splendore, le variazioni della corrente di scarica; mentre nell'aria i segni della discontinuità sono sopratutto evidenti agli elettrodi, come risulta dalle bellissime fotografie di Battelli e Magri.

Intanto con oscillatori anche di piccola lunghezza d'onda, e scintilla scoccante nell'olio di vasellina, non è da escludere a priori che siano visibili le righe degli elettrodi. Nell'ipotesi della loro visibilità, possiamo prevedere come esse debban modificarsi qualora la luce sia veramente discontinua.

Con un piccolo oscillatore producente onde di 1 cm., il periodo delle intermittenze luminose, e quindi di $\varphi(t)$, sarebbe di $\frac{1}{3 \times 10^{10}}$; le successive componenti in cui si scinde la luce normale saranno quindi a una distanza eguale a $\frac{1}{15}$ di quella delle due righe del sodio, e le *due più interne*, dall'una e dall'altra parte, disteranno di $\frac{1}{7}$ di quella distanza.

Tale notevole modificazione delle righe normali deve quindi potersi constatare facilmente anche con un ordinario reticolo di Rowland, rivelando la discontinuità della luce che lo specchio girante non perviene a risolvere, a meno che le perturbazioni spettrali che secondo diversi autori, tra cui il Wilsing (2), accompagnano la produzione delle scintille nei liquidi, non mascherino completamente il fenomeno.

Mi riservo di comunicare all'Accademia i risultati delle esperienze che intendo eseguire in proposito.

(1) Ann. d. Ch. et d. Phys. Serie 7, T. 15, pag. 156, 1898.

(2) Wilsing, *Ueber die Deutung des typischen spectrums der neuern Sterne.* Berl., Ber. 1899, pag. 426; Kayser, *Hand. d. Spectrosc.* 1 Band, pagg. 227-228.

Fisica terrestre. — *Sul Pireliometro a compensazione elettrica dell'Ångström.* Nota di Ciro Chistoni, presentata dal Socio P. Blaserna.

Nell'eseguire le misure pireliometriche a Corleto, a Modena, a Sestola ed al Monte Cimone dal 1898 al 1901 (1), non ebbi solo per iscopo di trovare dei valori pireliometrici, ma anche di esaminare i varî apparecchi proposti per le ricerche di questo genere.

Impegnato, prima come membro della Commissione internazionale per le osservazioni della radiazione solare (2), poi come membro del Comitato della Società degli Spettroscopisti italiani per lo studio del Sole (3), ad intraprendere una serie lunga di misure pireliometriche, credetti mio dovere anzitutto di decidere, fra i varî proposti, quale strumento avrei preferito (4). Quando presi parte alla discussione nella riunione della Commissione della radiazione solare a Parigi nel settembre del 1900 (5), non aveva ancora avuto campo di studiare praticamente il pireliometro a compensazione elettrica dell'Ångström; ed è stato in quell'occasione che il sig. Edelstam ebbe la cortesia di mostrarmi il pireliometro e di interessarsi poi presso il sig. prof. Ångström perchè potessi avere sollecitamente uno di detti apparecchi (6).

(1) Rendiconti della R. Accad. dei Lincei, serie 5ª, vol. XI, 1° sem. 1902, pagg. 77, 479 e 539; vol. XII, 1° sem. 1903, pagg. 53, 258 e 625; vol. XIV, 1° sem. 1905, pag. 147.

(2) *Rapport de la Conférence météorologique internationale*; réunion de Paris, 1896, pag. 24. Paris, Gauthier-Villars, 1897.

(3) *Memorie della Soc. degli spettroscopisti italiani*, vol. XXXIII (1904), pag. 211.

(4) Dalle notizie relative a studî solari pubblicate dal prof. A. Riccò (*Mem. Soc. spet. ital.*, vol. XXXIII (1904), pag. 249) rilevo che il Comitato centrale per gli studî sul Sole desidera conoscere quale apparecchio o quali apparecchi adotta ogni membro dei Comitati parziali per le sue speciali ricerche.

(5) *Congrès international de météorologie.* Paris, 1900 (pag. 58), Paris, Gauthier-Villars, 1901.

(6) Per conoscere il principio scientifico sul quale è basato il pireliometro a compensazione elettrica dell'Ångström e per comprendere come è costruito questo apparecchio, si possono consultare: *Eine elektrische Kompensationsmethode zur quantitativen Bestimmung Strahlender Wärme*, von Knut Ångström (Nova Acta regiae Societatis Scientiarum upsalientis; serie tertiae; vol. XVI, 1893; ed anche: The physical Review, I, 365, 1893). K. Ångström, *Ueber absolute Bestimmungen der Wärmestrahlung mit dem elektrischen Compensationspyrheliometer, nebst einigen Beispielen der Anwendung dieses Instrumentes* (Wied. Ann. der Phys. und Ch. neue Folge; Bd. LXVII (1899) ed anche: Astrophysical Journal, vol. IX (1899), pag. 334).. — K. Ångström, *Intensité de la radiation solaire à différentes altitudes; recherches faites à Ténériffe 1895 et 1896* (Nova Acta, etc., 2/VII, 1900). — *Rapport du Comité météorologique international*; réunion de St. Pétersbourg,

Per le ragioni che esporrò, ho stimato che questo istrumento debba corrispondere meglio di ogni altro per intraprendere una serie di misure, che dovrebbe durare per diversi anni.

Il pireliometro Ångström, oltre che essere fondato sopra un saldo principio scientifico, offre molti vantaggi sugli altri apparecchi attinometrici e pireliometrici proposti precedentemente da altri scienziati e dallo stesso Ångström; e vedo con soddisfazione che di questo parere è anche una distinta persona, che contribuì non poco al progresso degli studî della radiazione solare, il Violle, il quale con saggio criterio, degno della sua alta intelligenza, riconosce che il pireliometro Ångström è preferibile al suo attinometro (1).

Il pireliometro Ångström, come dice bene il Violle, non richiede correzioni per perdite di calore dovute alla radiazione, alla convezione ed alla conduttività. Per prontezza, l'apparecchio supera tutti gli altri; bastano dieci secondi perchè le striscie pireliometriche raggiungano la temperatura stazionaria. Un altro vantaggio pratico, che non può sfuggire a chi ha fatto misure di radiazione solare, si è che l'apparecchio Ångström dispensa dall'uso di un delicato misuratore degli intervalli di tempo; ed è questa, credo, la ragione principale per cui questo pireliometro può essere usato anche da chi sia stato soltanto istruito a fare con cura le osservazioni meteorologiche correnti, o da un meccanico intelligente, che sia vissuto per qualche anno in un Istituto di Fisica.

Non bisogna però credere che il pireliometro a compensazione elettrica sia uno strumento da potersi trattare con poca cura; tutt'altro, le parti che lo compongono (pireliometro propriamente detto, galvanometro, amperimetro di precisione, termometro ecc.) sono delicate e vogliono essere tenute e trattate con cura. Il vento, dirò anzi, i movimenti sentiti dell'aria, influiscono sull'apparecchio (2) e non si riesce a compensare stabilmente il pireliometro, se non si opera in luogo dove l'aria sia quieta. Sta all'avvedutezza di chi lo deve adoperare, di disporre le cose in modo che tutto proceda convenevolmente. Perciò, se è possibile confidare la manualità di alcune osservazioni a persone, che non appartengono al personale di concetto di un Istituto scientifico, bisogna che chi si assume la responsabilità dei risultati,

---

1899 (pag. 59); réunion de Southport, 1903 (pag. 83). Paris, Gauthier-Villars, 1900 e 1904. *Bericht des internationalen Meteorologischen Komitees.* Versammlungen zu Paris, 1900 und zu Southport, 1903, S. 67. Berlin, A. Asher et C., 1905. — *Congrès international de météorologie*; Paris, 1900 (pag. 29). Paris, Gauthier-Villars, 1901.

(1) *Rapport*, etc., réunion de Southport, 1903, pag. 83. — *Bericht des intern. Met. Kom.*, etc. S. 67.

(2) Non si creda che gli altri attinometri o pireliometri vadano esenti da questo inconveniente; lo stesso attinometro Violle, che ha il termometro pireliometrico protetto più di ogni altro istrumento, va soggetto a repentine variazioni nelle indicazioni, se non è riparato convenientemente dal vento.

esamini di sovente ed attentamente il complesso degli istrumenti che vanno uniti al pireliometro, curi la collocazione di essi ed in ispecie si accerti che quando il pireliometro viene esposto, non sia sottoposto a correnti d'aria.

Talvolta avviene che riesce difficile la compensazione esatta mediante la corrente elettrica, così da ridurre a zero il galvanometro, che si mostra perturbato da continue e rapide variazioni, senza che si possa attribuire la causa di questo fatto a correnti d'aria. In tali casi, chi ha la pazienza di indagare con cura ed attenzione lo stato del cielo, finisce coll'accorgersi che in quella parte di atmosfera attraversata dai raggi solari che finiscono al pireliometro, vagano dei tenuissimi veli di vapore acqueo, che assorbendo con irregolarità i raggi solari, fanno variare incessantemente la temperatura della striscia esposta al sole. Questo fatto dimostra che il pireliometro Ångström è anche dotato di una grande sensibilità (1).

Un inconveniente che ho verificato in tre anni di continuo uso del pireliometro a compensazione elettrica e che mi sono fatto premura di segnalare subito all'Ångström stesso, è il seguente: col tempo le laminette di rame della doppia coppia termoelettrica si allontanano dalle striscie pireliometriche in modo da lasciare incerti nelle indicazioni. A questo inconveniente che mostrarono i primi pireliometri, oggi si rimedia con una disposizione più accurata delle striscie pireliometriche e delle laminette di rame.

Per quanto la costruzione degli amperimetri di precisione sia ora giunta a tale grado di perfezione da non lasciare dubbî sulle loro indicazioni, pure sarà sempre prudente un accurato esame dell'amperimetro che va unito al pireliometro, poichè un errore di 0,001 di Amp. può arrecare un errore di circa 0,005 di caloria-grammo nel risultato delle misure (2).

Gli amperimetri dei quali feci uso in questi ultimi tre anni nelle misure pireliometriche, sono stati confrontati con un amperimetro di precisione costruito dalla Casa Hartmann & Braun di Francoforte sul Meno, del tipo Wa, che è controsegnato dai N. 131913/1293. La Casa stessa si assunse l'esame accurato dell'apparecchio, verificando le indicazioni dell'am-

(1) Si sottintende che l'operatore deve essere sicuro e deve sempre accertarsi che la coppia elettrica o le coppie elettriche delle quali fa uso, non vadano soggette a variazioni di forza elettromotrice, poichè se ciò fosse, non riuscirebbe possibile in nessun caso di mantenere a zero il galvanometro per un certo tempo, od almeno per quel che necessita per fare con accuratezza la lettura dell'amperimetro. Come pure resta inteso che durante l'operazione si deve procurare incessantemente che il tubo del pireliometro sia esattamente rivolto verso il sole.

(2) Veggasi a questo riguardo: C. F. Marvin, *The measurement of Sunshine and the preliminary examination of Ångström's Pyrheliometer* (Mont. Weather Review; volume XXIX; october 1901, pag. 454). — Harvey N. Davis, *Observations of Solar radiation with the Ångström pyrheliometer at Providence.* R. I. (Id. vol. XXXI; june 1903, pag. 275. — H. H. Kimball, *Observation of Solar radiation with the Ångström pyrheliometer at Asheville and Black Moutain.* N. C. (Id. july 1903, pag. 320).

perimetro (tenuto orizzontale e disposto così, che la freccia indicatrice incisa sullo strumento fosse diretta verso nord) mediante un potenziometro della stessa Casa, che era stato verificato esatto dall' imperiale Istituto Fisico-tecnico di Charlottemburg (1).

La scala dell'amperimetro è segnata da 0 a 100, e mediante un commutatore si può ottenere che ogni divisione corrisponda od a 0,005 Amp. oppure a 0,01 Amp. Nel primo caso la resistenza interna dell'apparecchio è di 0,254 Ohm, nel secondo caso di 0,160 Ohm., Durante i confronti, la temperatura dell'aria ambiente era di 21° C. ed i coefficienti di temperatura trovati (0,000022 nel primo caso e 0,000088 nel secondo, per amp. e per grado) sono tali da esonerare di tenere conto delle correzioni dovute alla temperatura, quando si pensi che coi pireliometri dell'Ångström ben difficilmente la corrente elettrica necessaria arriva a 0,45 Amp. e che non si può richiedere una precisione maggiore di 0,001 Amp.

Le indicazioni notate nel seguente quadro, che sono i risultati dei confronti, si intendono riferite ad una collocazione esatta dell' indice sullo zero della scala, quando per l'amperimetro non passi la corrente elettrica.

Posizione dell'indice sulla scala	Intensità della corrente che passa per lo strumento		Valore medio dell' intensità della corrente
	da 0 a 0,5 Amp.	da 0 ad 1 Amp.	
10	0,005 × 9,946 Amp.	0,01 × 9,937 Amp.	0,005 oppure 0,01 × 9,942 Amp.
20	19,996	19,993	19,995
30	30,016	30,006	30,011
40	40,014	39,999	40,007
50	50,018	50,007	50,013
60	59,980	59,973	59,997
70	69,952	69,942	69,947
80	80,006	80,016	80,011
90	89,994	89,973	89,984
100	99,996	99,990	99,993

Valendomi di questo amperimetro ho trovato, mediante quattro confronti, fatti tanto per la scala da 0 a 0,5 Amp. che per la scala da 0 ad 1 Amp. i seguenti valori in Amp. corrispondenti alla graduazione dell'amperimetro N. 150947/1582 della stessa Casa Hartmann & Braun, costruito come il precedente. La temperatura dell'ambiente durante i confronti è stata di circa 14° ed i confronti vennero eseguiti il 30 ed il 31 marzo 1904.

(1) Physikalische Zeitschrift; I Jahrgang (1899-1900). S. 167-168.

L' indice, mentre non passava corrente per l'apparecchio, era stato preventivamente ridotto a 0; e tale si mantenne durante i due giorni suddetti.

Posizione dell'indice sulla scala	Valore in Ampères	
	da 0 a 0,5 Amp.	da 0 ad 1 Amp.
10	0,04887	0,09988
20	0,09996	0,20003
30	0,15000	0,30006
40	0,20000	0,40006
50	0,25004	0,50007
60	0,30002	0,60000
70	0,35000	0,70000
80	0,40000	0,80004
90	0,45000	0,90003
100	0,50000	1,00004

Dal 4 al 6 aprile 1903 (essendo 15° gradi circa la temperatura dell'ambiente) si fecero confronti fra l'amperimetro Hartmann et Braun 131913/1293 e il Milli-Volt-Amperimetro della Casa Siemens et Halske N° 66235, con applicatavi la derivazione $^1/_9$ Ohm N° 14895, per modo che ogni divisione della graduazione corrispondesse a 0,01 Amp. In questo Amperimetro l' indice (mentre non passava la corrente nell' istrumento) segnava + 0,3 di divisione, e di questo spostamento si è sempre tenuto conto nelle letture della scala; o per meglio dire, i risultati dei confronti valgono solo nel caso che si siano corrette le indicazioni dell'amperimetro dallo spostamento dello zero, indicato dall' indice. Durante i confronti lo spostamento dell' indice si mantenne costantemente + 0,3. I confronti sono stati cinque, e si limitarono nell' intervallo da 0 a 0,5 Amp., non dovendo l'apparecchio servire che per le misure pireliometriche. Credo affatto inutile fare parola del come sono costruiti e montati i Milli-Volt-Amperimetri Siemens & Halske, poichè sono usati generalmente negli Istituti scientifici e negli Istituti industriali.

Finiti i confronti col precedente apparecchio, nei giorni 6 e 7 aprile 1903, sempre essendo 15° circa la temperatura dell'ambiente, ho esaminato il Milli-Volt-Amperimetro Siemens & Halske N° 66234 colla derivazione $^1/_9$ Ohm N° 14894. In questo apparecchio l' indice, mentre non passava la corrente segnava — 0,2 di divisione, e lo spostamento (del quale si tenne sempre calcolo) non subì variazioni durante i confronti.

Nei giorni 1 e 2 aprile 1904 ho esaminato un terzo Milli-Volt-Amperimetro Siemens & Halske N° 53352 con derivazione $^1/_9$ Ohm N° 12320. Questo istrumento si trova a Modena fino dai primi mesi del 1901 e non ebbe mai spostamento d' indice, nè lo ha, quantunque a più riprese sia stato

portato da Modena a Sestola e da Sestola al monte Cimone. La temperatura dell'ambiente durante i confronti è stata di 16° circa.

I risultati ottenuti coi tre amperimetri Siemens & Halske stanno riuniti nel seguente quadro:

Posizione dell'indice sulla scala	Valore in Ampères		
	N° 66235 con der. 14895	N° 66234 con der. 14894	N° 53352 con der. 12320
5	0,0505	0,0502	0,0496
10	0,1006	0,1003	0,0986
15	0,1509	0,1504	0,1488
20	0,2016	0,1996	0,1991
25	0,2511	0,2496	0,2493
30	0,3012	0,2994	0,3001
35	0,3513	0,3493	0,3494
40	0,4014	0,3988	0,3993
45	0,4515	0,4487	0,4493
50	0,5015	0,4987	0,4983

Facendo uso degli amperimetri suindicati, ho esaminato cinque pireliometri dell'Ångström controsegnati coi N^i. 19; 29; 38; 39 e 39 bis, dei quali le costanti stanno riunite nel seguente specchio:

	N° 19	N° 29	N° 38	N° 39	N° 39 bis
Resistenza elettrica delle striscie per cm. a 20° (r) in Ohm . .	0,0682	0,07933 (1)	0,0661	0,0679	0,2952
Coeff. di variazione della resistenza colla temperatura . . .	0,00045	0,00045	0,00045	0,00045	zero
Larghezza delle striscie (b) in cm.	0,1486	0,1498	0,15	0,15	0,149
Potere assorbente della superficie (a)	0,98	0,98	0,97	0,97	0,98

L'intensità della radiazione è data dalla relazione

$$Q = 60 \frac{ri^2}{4,19 \cdot b \cdot a} \text{ gr. — cal. per min. e per cm}^2 \ (i = \text{int. della corr. in Amp.})$$

che può essere messa sotto la forma $Q = ki^2$, avendo k i seguenti valori per le corrispondenti temperature e per il corrispondente pireliometro:

(1) La resistenza del N° 29 corrisponde a 17° di temp.

	— 10°	0°	10°	20°	30°	40°
N° 19		6,65	6,68	6,71	6,74	6,77
N° 29		7,69	7,72	7,75	7,78	7,81
N° 38	6,42	6,45	6,48	6,51	6,54	6,57
N° 39	6,61	6,64	6,67	6,70	6,73	6,76
N° 39 bis	29,0	29,0	29,0	29,0	29,0	29,0

In altra Nota darò conto dei risultati dei confronti fatti coi pireliometri suindicati.

V. C.